L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est notée I_2.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$ et $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace ; par convention $A^0 = I_2$.

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|$ définie pour $A = (a_{i,j})$ par $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \sum\limits_{j=1}^{2} |a_{i,j}|$; on admet que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

À toute matrice A, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on associe la suite $\big(E_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$E_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'objet du problème est d'établir la convergence de la suite $\big(E_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que certaines propriétés de sa limite qu'on notera $\exp(A)$ et qu'on appellera l'exponentielle de la matrice A.

I. Résultats généraux

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\|A\|^n$ est convergente. Quelle est sa somme ?
   (b) En déduire que la suite $\big(E_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (*on pourra montrer qu'elle est de* Cauchy)
2. On suppose qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, converge vers une matrice A. Montrer que pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, la suite $(BA_nC)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC
3. Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer la matrice $E_n(PAP^{-1})$ à l'aide de $E_n(A)$, P et P^{-1}.
   (b) En déduire une relation entre $\exp(PAP^{-1})$ et $\exp(A)$. Que peut-on conclure ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que l'application $X \longmapsto {}^tX$ est continue.
   (b) En déduire que $\exp({}^tA) = {}^t(\exp(A))$.

II. Exemples de calcul de l'exponentielle d'une matrice

1. Dans cette question, on pose $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer la matrice D^n.
   (b) En déduire l'expression de $E_n(D)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de $\exp(D)$.
2. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où a et μ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Calculer la matrice A^2.
   (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, exprimer la matrice A^n.
   (c) En déduire l'expression de la matrice $E_n(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de $\exp(A)$.
3. Calculer l'exponentiel de la matrice $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \mu & b \end{pmatrix}$ où b et μ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
4. On considère les matrices A et B des questions 2. et 3. ainsi que la matrice $C = \begin{pmatrix} c & \mu \\ \mu & c \end{pmatrix}$ où c et μ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}CP$ soit diagonale.
   (b) En déduire l'expression de $\exp(C)$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
5. Ici on considère la matrices $R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels.
   (a) Déterminer une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $Q^{-1}RQ$ soit diagonale.
   (b) En déduire que $\exp(R) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.
   (c) Expliciter alors une matrice $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

III. Détermination de l'image de la fonction exponentielle

A- Étude dans le cas complexe

1. Soit A un éléments quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (a) Si A est diagonalisable, montrer que la matrice $\exp(A)$ est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice diagonale.
   (b) Si A n'est pas diagonalisable.
      i. Montrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.
      ii. En déduire une matrice semblable à la matrice $\exp(A)$.
      iii. La matrice $\exp(A)$ est-elle diagonalisable ?
2. Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, montrer que $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$.

3. En déduire que l'exponentielle de tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

4. Montrer que l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle est exactement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. (*On pourra distinguer les cas de matrices diagonalisables et de matrices non diagonalisables et utiliser les questions 1. et 2. de II.*)

B- Étude dans le cas réel

1. Soit A un éléments quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, montrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, diagonale ou du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

   (b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, montrer que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

   (c) Justifier que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$ et en déduire que
$$\exp(A) \in \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ \det M > 0\}.$$

2. On pose $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A) = N$.

   (a) Préciser $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N)$ et montrer que la matrice N n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.(*on pourra raisonner par l'absurde*)

   (c) Montrer alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et trouver une contradiction. Que peut-on Conclure ?

3. Soit A un élément quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, montrer que la matrice A est une exponentielle si et seulement si son spectre est inclue dans $\mathbb{R}_+^*$ ou A est de la forme λI_2, avec $\lambda \neq 0$.

   (b) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, on a vu que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \overline{a}$.

      i. Montrer alors que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$.
      On admettra que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

      ii. Mettre la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$ sous la forme $e^{\varepsilon}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec ε et θ réels, puis en déduire que la matrice A est une exponentielle.

FIN DE L'ÉPREUVE