

1. PARTIE

1. quelque soit la valeur de k les fonctions $f_{n,k} : x \rightarrow \frac{1}{(x \pm n)^k}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

1. Pour $k \geq 2$ on a $\left| \frac{1}{(x \pm n)^k} \right| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k}$ ce qui assure la convergence absolue des séries $\sum \frac{1}{(x \pm n)^k}$ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ par comparaison d'une série à terme positif à une série de Riemann convergente.

pour $k = 1$ On a $x + n > 0$ pour $n > 1 + E(-x)$. La série $\sum \frac{1}{x+n}$ est donc à termes positifs à partir d'un certain rang. De plus $\frac{1}{x+n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$ ce qui assure la divergence de la série $\sum \frac{1}{x+n}$. même chose pour $\sum \frac{1}{x-n}$ avec une série à termes négatifs à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\sum \frac{1}{(x \pm n)^k} \text{ converge si et seulement si } k > 1}$$

2. On a $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{(x+n)(x-n)}$ donc $\left| \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right| \sim \frac{2|x|}{n^2}$ ce qui assure la convergence absolue de la série sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\sum \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \text{ converge}}$$

2. On peut remarquer que pour $k \geq 2$ on a aussi $E_k = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k}$

1. On a $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+n)^k} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x-n)^k} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{(x+m)^k} + \sum_{m=-N}^{-1} \frac{1}{(x+m)^k}$, par changement d'indice. Le terme $\frac{1}{x^k}$ correspond à la valeur $m = 0$. On a donc $\frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k} = \sum_{m=-N}^N \frac{1}{(x+m)^k}$.

Par convergence des sommes partielles vers la somme de la série on a bien

$$\boxed{E_k(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{m=-N}^N \frac{1}{(x+m)^k} \right)}$$

2. On a $\sum_{m=-N}^N \frac{1}{(x+1+m)^k} = \sum_{m=1-N}^{1+N} \frac{1}{(x+m)^k} = \sum_{m=1-N}^{N-1} \frac{1}{(x+m)^k} + \frac{1}{(x+N)^k} + \frac{1}{(x+N+1)^k}$. Si on fait tendre N vers $+\infty$ on obtient :

$$\boxed{E_k(x+1) = E_k(x)}$$

3. Si k est pair on a $\frac{1}{(-x)^k} = \frac{1}{x^k}$ et $\frac{1}{(-x+n)^k} + \frac{1}{(-x-n)^k} = \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k}$. En sommant les égalités $E_k(-x) = E_k(x)$ et E_k est paire.

De même si k est impair E_k est impair.

2. PARTIE

1. Soit $f_n : x \rightarrow \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k}$. Les fonctions f_n sont C^1 sur tout intervalle du type $I =]p, p+1[$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Sur un tel intervalle la série $\sum f_n$ converge simplement. De plus $f'_n(x) = -k \left(\frac{1}{(x+n)^{k+1}} + \frac{1}{(x-n)^{k+1}} \right)$. Pour n assez grand $(x+n)$ et $(n-x)$ sont positifs sur I et $|f'_n(x)| \leq k \left(\frac{1}{(n+p)^{k+1}} + \frac{1}{(n-p-1)^{k+1}} \right) = v_n$. La suite v_n est indépendante de x et la série $\sum v_n$ converge car $v_n \sim \frac{2k}{n^{k+1}}$ série de Riemann convergente ($1+k > 1$). La série $\sum f'_k$ converge normalement, donc uniformément sur I .

La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est donc C^1 sur I et on peut en calculer la dérivée par dérivation sous le signe \sum . Comme $\frac{1}{x^k}$ est C^1 sur I , E_k est C^1 sur I et $E'_k(x) = -kE_{k+1}$

2. Récurrence immédiate : E_1 est C^{k-1} sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et $E_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$

- La propriété est vraie si $k = 1$
- Si on suppose $E_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$ alors comme $E_1^{(k-1)}$ est C^1 sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ donc E_k y est C^k et :

$$E_{k+1} = -\frac{E'_k}{k} = -\frac{1}{k} \left(\frac{(-1)^k}{(k-1)!} E_1^{(k-1)} \right)' = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} E_1^{(k)}$$

- Comme E_1 est C^∞ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, E_k y est aussi C^∞

3. Ce sont des développements de Taylor Young à l'ordre 2 en x (possibles les fonctions étant au moins C^2) dans les quels on remplace les dérivées en utilisant : $E'_k(x) = -kE_{k+1}$ et $E''_k(x) = k(k+1)E_{k+2}$

$$\begin{aligned} E_1(x+h) &= E_1(x) + hE'_1(x) + \frac{h^2}{2}E''_1(x) + h^2\varepsilon_1(x) \\ &= E_1(x) - hE_2(x) + h^2E_3(x) + h^2\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

de même pour les deux autres formules.

3. PARTIE

1. On a une série de Riemann avec $2s > 1$. D'où la convergence de la série.
2. Pour $x \in]-1, 1[$ on a $\frac{x}{n} \in]-1, 1[$ ce qui assure la convergence de la série.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} = \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = n \frac{1}{n-x}$$

donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{k+1}} = \frac{1}{n-x}$. En substituant $-x$ à x : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n^{k+1}} = \frac{1}{n+x}$.

Remarque 5/2 : le sujet initial fait le même calcul en parlant de série entière.

3. Par commutativité admise des sommes on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-n)} + \frac{1}{(x+n)} \right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} x^{2s-1} \right) = - \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1} \right) = - \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{2s} x^{2s-1}$$

pour $x \neq 0$ on peut ajouter $\frac{1}{x}$ à l'égalité précédente :

$$\boxed{E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2s} x^{2s-1}}$$

4. Pour calculer $E_k(x)$ on va dériver $k-1$ fois la relation précédente en utilisant :

$$(x^{2s-1})^{(k-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 2s \\ (2s-1)! & \text{si } k = 2s \\ \frac{(2s-1)!}{(2s-k)!} x^{2s-k} & \text{si } k < 2s \end{cases}$$

Ce qui donne $(x^{2s-1})^{(k-1)} \cdot \frac{1}{(k-1)!} = C_{2s-1}^{k-1} x^{2s-k}$ avec les notations du sujet.

$$E_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} - (k-1)! \sum_{s=1}^{\infty} C_{2s-1}^{k-1} \gamma_{2s} x^{2s-k} \right)$$

$$\boxed{E_k(x) = \frac{1}{x^k} + (-1)^k \sum_{s=1}^{\infty} C_{2s-1}^{k-1} \gamma_{2s} x^{2s-k}}$$

4. PARTIE

1. La fraction ayant un degré strictement négatif on peut écrire :

$$\frac{1}{x^2(x-a)^2} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{(x-a)^2} + \frac{\delta}{(x-a)}$$

En multipliant par x^2 et en faisant tendre x vers a on a $\alpha = \frac{1}{a^2}$. De même (ou par symétrie par rapport à $x = a/2$) on a $\gamma = \frac{1}{a^2}$. Si on multiplie par x et si on fait tendre x vers $+\infty$ on a $\beta + \delta = 0$. La valeur en un point $x = a/2$ par exemple donne alors $\beta = -\delta = \frac{2}{a^3}$

$$\boxed{\frac{1}{x^2(x-a)^2} = \frac{1/a^2}{x^2} + \frac{2/a^3}{x} + \frac{1/a^2}{(x-a)^2} - \frac{2/a^3}{(x-a)}}$$

2. On prend $p = x$ et $q = a - x$ dans la relation précédente. On a alors $r = p + q = a$

$$\boxed{(p+q=r) \Rightarrow \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \frac{2}{r^3} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)}$$

2. On a en prenant $p = x + n, q = h + m - n, r = p + q = x + h + m$

$$\frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} = \frac{1}{(x+h+m)^2} \left(\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(h+m-n)^2} \right) + \frac{2}{(x+h+m)^3} \left(\frac{1}{(x+n)} + \frac{1}{(h+m-n)} \right)$$

De même avec $p = x - n, q = h + m + n, r = p + q = x + h + m$

$$\frac{1}{(x-n)^2(h+m+n)^2} = \frac{1}{(x+h+m)^2} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(h+m+n)^2} \right) + \frac{2}{(x+h+m)^3} \left(\frac{1}{(x-n)} + \frac{1}{(h+m+n)} \right)$$

Donc pour $n > 0$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} + \frac{1}{(x-n)^2(h+m+n)^2} = \\ \frac{1}{(x+h+m)^2} \left(\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(h+m-n)^2} + \frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(h+m+n)^2} \right) + \\ \frac{2}{(x+h+m)^3} \left(\frac{1}{(x+n)} + \frac{1}{(h+m-n)} + \frac{1}{(x-n)} + \frac{1}{(h+m+n)} \right) \end{array} \right.$$

et pour $n = 0$:

$$(2) : \frac{1}{(x)^2(h+m)^2} = \frac{1}{(x+h+m)^2} \left(\frac{1}{(x)^2} + \frac{1}{(h+m)^2} \right) + \frac{2}{(x+h+m)^3} \left(\frac{1}{(x)} + \frac{1}{(h+m)} \right)$$

On ajoute les lignes (1) pour n variant de 1 à N et la ligne 2.

$$S_{M,N}(x, h) = \sum_{m=-M}^M \left[\frac{1}{(x+h+m)^2} \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(h+m+n)^2} \right) + \frac{2}{(x+h+m)^3} \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{(x+n)} + \frac{1}{(h+m+n)} \right) \right]$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et comme la somme sur n a un nombre fini de termes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{M,N}(x, h)) = \sum_{m=-M}^M \left[\frac{1}{(x+h+m)^2} (E_2(x) + E_2(h+m)) + \frac{2}{(x+h+m)^3} (E_1(x) + E_1(h+m)) \right]$$

Si maintenant M tend vers $+\infty$:

$$\sum_{m=-M}^M \frac{1}{(x+h+m)^2} E_2(x) = E_2(x) \sum_{m=-M}^M \frac{1}{(x+h+m)^2} \rightarrow E_2(x) E_2(x+h)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-M}^M \frac{E_2(h+m)}{(x+h+m)^2} &= \sum_{m=-M}^M \frac{E_2(h)}{(x+h+m)^2} \text{ à cause de la période 1 de } E_2 \\ &= E_2(h) \sum_{m=-M}^M \frac{1}{(x+h+m)^2} \rightarrow E_2(h) E_2(x+h) \end{aligned}$$

Et de même dans l'autre terme:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} (S_{M,N}(x)) \right) = E_2(x+h) (E_2(x) + E_2(h)) + 2E_3(x+h) (E_1(x) + E_1(h))$$

Intervertissons les limites (admis) :

$$\sum_{m=-M}^M \frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} = \frac{1}{(x+n)^2} \sum_{m=-M}^M \frac{1}{(h-n+m)^2} \rightarrow \frac{E_2(h-n)}{(x+n)^2} = \frac{E_2(h)}{(x+n)^2} \text{ (période)}$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} (S_{M,N}(x)) \right) = E_2(h) E_2(x)$$

Les deux limites sont égales :

$$\boxed{E_2(h) E_2(x) = E_2(x+h) (E_2(x) + E_2(h)) + 2E_3(x+h) (E_1(x) + E_1(h))}$$

5. PARTIE

1. $y^2 + \pi^2$ ne prenant pas la valeur zéro on a

$$\frac{y'}{y^2 - \pi^2} = -1$$

Soit en intégrant par rapport à x

$$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{\pi}\right) = Cste - x$$

Le membre de gauche est compris entre $-1/2$ et $1/2$ (stricte) . On doit donc prendre $Cste = a$ pour que le membre de droite soit toujours compris entre $-1/2$ et $1/2$.

$$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{\pi}\right) = a - x$$

$$\boxed{y(x) = \pi \tan(\pi(a - x))}$$

2. Un beau développement asymptotique à l'ordre 0:

$$E_2(x)E_2(h) = E_2(x) \left(\frac{1}{h^2} + \gamma_2 + o(1) \right)$$

$$\begin{aligned} E_2(x+h)(E_2(x) + E_2(h)) &= (E_2(x) - 2E_3(x)h + 3E_4(x)h^2 + o(h^2)) \left(\frac{1}{h^2} + E_2(x) + \gamma_2 + o(h) \right) \\ &= \frac{E_2(x)}{h^2} - 2\frac{E_3(x)}{h} + (3E_4(x) + E_2(x)^2 + E_2(x)\gamma_2) + o(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2E_3(x+h)(E_1(x) + E_1(h)) &= 2(E_3(x) - 3hE_4(x) + o(h)) \left(\frac{1}{h} + E_1(x) - \gamma_2h + o(h) \right) \\ &= 2\frac{E_3(x)}{h} + (2E_3(x)E_1(x) - 6E_4(x)) + o(1) \end{aligned}$$

Si on reporte alors dans (3) les termes en $\frac{1}{h^2}$ et $\frac{1}{h}$ se simplifient et il reste en faisant tendre h vers 0

$$\gamma_2 E_2(x) = (3 - 6)E_4(x) + E_2(x)^2 + \gamma_2 E_2(x) + 2E_1(x)E_3(x)$$

Soit :

$$\boxed{3E_4(x) = E_2(x)^2 + 2E_1(x)E_3(x)}$$

La relation est vraie sur $]0, 1[$ donc par période sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

3. On élimine E_4 entre (4) et (5)

$$3E_4 = E_2^2 + 2E_1E_3 = 3E_2^2 - 6\gamma_2 E_2$$

d'où (6). On dérive maintenant cette relation :

$$2(E_1'E_3 + E_1E_3') = 4E_2E_2' - 6\gamma_2 E_2'$$

Soit avec la relation $E_k' = -kE_{k+1}$

$$-2E_2E_3 - 6E_1E_4 = -8E_2E_3 - 12\gamma_2 E_3$$

On obtient alors (7) par changement de membre et division par 6.

Si on élimine $\gamma_2 E_2 E_3$ entre (5) E_3 et (7) E_2 on a $(E_4)(E_3 - E_1 E_2) = 0$.Donc pour tout point x telle que $E_4(x) \neq 0$ on a $E_3(x) = E_1(x)E_2(x)$.

Or E_4 est une somme de nombres positifs non tous nuls . Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $E_4(x) \neq 0$

Donc (8) est vrai

Pour avoir (9) on substitue la valeur de E_3 que l'on vient de trouver dans (6) et on simplifie par E_2 toujours strictement positif.

4. On sait que $E_2 = -E_1'$ d'où la relation voulue.

5. On a donc d'après V1 avec $a = 1/2$: $E_1(x) = y(x) = \pi \tan(\pi/2 - \pi x) = \pi \cotan(\pi x)$

$$\boxed{E_1(x) = \pi \cotan(\pi x)}$$

Par période la relation est vraie sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.