

30M

On se propose de définir, au moyen de sommes de séries, une famille de fonctions  $E_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) de période 1, puis de reconnaître en  $E_1$  une fonction trigonométrique classique. Les parties II, III, IV et V utilisent la définition des  $E_k$  donnée dans la partie I ; elles peuvent être abordées de façon indépendante, les résultats nécessaires étant explicités chaque fois qu'il en est besoin.

ICARE 98 TSI  
red 1

**Partie I. Définition des fonctions  $E_k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )**

1. Soit  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ .

1.1. Etablir, suivant la valeur de  $k \in \mathbb{N}^*$ , la nature des séries  $\sum_{n=1}^{-k} \frac{1}{(x-n)^k}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$ .

1.2. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$  ?

2. On définit, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , une application  $E_k : \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),$$

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k} \quad \text{si } k \geq 2.$$

2.1. Montrer que l'on peut écrire, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ,

$$E_k(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^k}.$$

2.2. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_k$  admet 1 pour période.

2.3. Etudier, suivant la valeur de  $k \in \mathbb{N}^*$ , la parité de  $E_k$ .

**Partie II. Dérivabilité et étude locale des fonctions  $E_k$**

*Montrer*

1. ~~On admet~~ que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la dérivée de  $E_k$  peut être obtenue en dérivant terme à terme par rapport à  $x$  sur  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  les séries définissant  $E_k$  dans la question 1.2. ; ~~montrer~~ que *et que*

$$(1) \quad E'_k = -k E_{k-1}.$$

2. En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_k$  est de classe  $C^\infty$  et

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  ; établir les développements limités suivants :

$$E_1(x+h) = E_1(x) - E_2(x)h + E_3(x)h^2 + h^2 \varepsilon_1(h)$$

$$E_2(x+h) = E_2(x) - 2E_3(x)h + 3E_4(x)h^2 + h^2 \varepsilon_2(h)$$

$$E_3(x+h) = E_3(x) - 3E_4(x)h + 6E_5(x)h^2 + h^2 \varepsilon_3(h)$$

où l'application  $\varepsilon_k$ , définie au voisinage de 0, est telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_k(x) = 0$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

**Partie III. Développement de  $E_1$  en série de puissances**

1. Soit  $s \in \mathbb{N}^*$  ; montrer que la série  $\sum_{n=1}^{-s} \frac{2}{n^{2s}}$  est convergente ; on note  $\gamma_{2s}$  sa somme.

*2) Montrer que pour  $x \in ]-1, 1[$  la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}}$  converge et calculer sa somme*

Etablir que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = - \sum_{n=1}^{-k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

3. Montrer que, pour tout  $x \in ]-1,0[ \cup ]0,1[$ ,

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{s=1}^{+\infty} \gamma_{2s} x^{2s-1}$$

(on admettra que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1} = \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}$ ).

4. En s'appuyant sur la relation donnée dans la question II.2., démontrer que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $x \in ]-1,0[ \cup ]0,1[$ ,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + (-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} C_{2s-1}^{k-1} \gamma_{2s} x^{2s-k},$$

où on convient que  $C_{2s-1}^{k-1} = 0$  si  $k > 2s$ .

Ceci permet d'écrire, en particulier,

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \gamma_2 x + x \delta_1(x)$$

$$E_2(x) = \frac{1}{x^2} + \gamma_2 + x \delta_2(x)$$

$$E_3(x) = \frac{1}{x^3} - 3\gamma_4 x + x \delta_3(x)$$

où, pour  $k = 1, 2, 3$ , l'application  $\delta_k : ]-1,0[ \cup ]0,1[ \rightarrow \mathbf{R}$  est telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \delta_k(x) = 0$ .

**Partie IV. Une formule d'addition liant  $E_1, E_2, E_3$**

1. Soient  $p, q, r \in \mathbf{R}^*$  tels que  $r = p + q$ .

1.1. Soit  $a \in \mathbf{R}^*$ ; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X^2(a-X)^2}$ .

1.2. En déduire la relation

$$(2) \quad \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \frac{2}{r^3} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right).$$

2. Soient  $x, h \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$  tels que  $x + h \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ . On pose, pour  $M, N \in \mathbf{N}$ ,

$$S_{M,N}(x, h) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^2 (h+m-n)^2}.$$

2.1. En utilisant la relation (2), montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{M,N}(x, h) = \sum_{m=-M}^M \frac{1}{(x+h+m)^2} [E_2(x) + E_2(h+m)] + \sum_{m=-M}^M \frac{2}{(x+h+m)^3} [E_1(x) + E_1(h+m)]$$

2.2. On admet que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} (\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{M,N}(x, h)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (\lim_{M \rightarrow +\infty} S_{M,N}(x, h));$$

en déduire la relation

$$(3) \quad E_2(x)E_2(h) = E_2(x+h)[E_2(x) + E_2(h)] + 2E_3(x+h)[E_1(x) + E_1(h)].$$

Partie V. Une équation différentielle vérifiée par  $E_1$

~~Montrer~~ Montrer

1. Montrer que, pour tout  $a \in \mathbf{R}$ , l'équation différentielle

$$y' + y^2 + \pi^2 = 0$$

admet sur l'intervalle  $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$  une unique solution, que l'on explicitera.

2. Soit  $x \in ]0, 1[$ , et  $h \in ]0, 1[$  tel que  $x + h \in ]0, 1[$  ; en regardant les deux membres de la relation (3) de la question IV.2.2. comme des fonctions de  $h$ , et en utilisant les développements donnés dans les questions II.3. et III.4., établir la relation

$$3E_4(x) = E_2^2(x) + 2E_1(x)E_3(x)$$

et en déduire la relation

$$(4) \quad 3E_4 = E_2^2 + 2E_1E_3 .$$

3. On admet la relation

$$(5) \quad E_2^2 = E_4 + 2\gamma_2 E_2 ,$$

où  $\gamma_2$  est défini au III.1. (elle s'établit de façon analogue à la précédente).

Déduire de (4) et (5) les relations suivantes :

$$(6) \quad E_1E_3 = E_2^2 - 3\gamma_2 E_2$$

$$(7) \quad E_2E_3 - 2\gamma_2 E_3 = E_1E_4 \quad (\text{utiliser (1)})$$

$$(8) \quad E_3 = E_1E_2 \quad (\text{utiliser (5) et (7)})$$

$$(9) \quad E_1^2 = E_2 - 3\gamma_2 \quad (\text{utiliser (6) et (8)})$$

4. Déduire de la question précédente que la restriction de  $E_1$  à  $]0, 1[$  est solution de l'équation différentielle

$$y' + y^2 + 3\gamma_2 = 0 .$$

5. On admettra que  $\gamma_2 = \frac{\pi^2}{3}$  ; en déduire que, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$E_1(x) = \pi \cot(\pi x) ,$$

où  $\cot$  désigne la fonction cotangente.

Cette égalité reste-t-elle vraie pour  $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$  ?