MINES - PONTS 2004, PSI, épreuve 2

partie 1 et 2 (partiellement réécrit)

On a deux suites linéaires récurrentes doubles , ce qui permet de calculer explicitement f_n et g_n en fonction de n en introduisant $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cela permet de résoudre certaines questions fermées ($\frac{1}{4}(g_n^2 - 5f_n^2)$) par exemple . Mais c'est une forme qui ne rend pas facile la devinette des réponses aux questions ouvertes.
Le calcul des premières valeurs de (f_n) et (g_n) n'est pas demandé . il est souhaitable de le faire au moins pour $n \geq 5$, pour vérifier ses idées.

Première Partie

1. a) on vérifie que $JU = J^2 + \frac{1}{2}J = \frac{5}{4}I + \frac{1}{2}J \in E$
b) $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$ donc $U^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{U^2 = U + I}$$

c) par récurrence simple

- On a $U^0 = I \in E$
- Si $U^n \in E$ pour un entier naturel n donné, alors il existe a_n et b_n tels que $U^n = a_n I + b_n J$ et par conséquen $U^{n+1} = a_n\, U + b_n\, JU$ or $U \in E$ et $JU \in E$ donc (par combinaison linéaire) $U^{n+1} \in E$
- la propriété est démontrée par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; , U^n \in E}$$

2. a) On a

$$U_{n+2} = f_{n+2}\; J + \frac{1}{2}g_{n+2}\; I = \quad (f_{n+1}\; J + \frac{1}{2}g_{n+1}\; I) + \quad (f_n\; J + \frac{1}{2}g_n\; I)$$
$$\boxed{U_{n+2} = U_{n+1} + U_n}$$

b) On multiplie par U^n la relation $U^2 = U + I$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $U^{n+2} = U^{n+1} + U^n$
3. On a $U_0 = I = U^0$, $U_1 = U = U^1$ et $U_2 = J + \frac{3}{2}I = U^2$.
. Les deux suites de matrices (U_n) et (U^n) vérifient la même relation de récurrence double ($M_{n+2} = M_{n+1} + M_n$) et ont la même initialisation ($U^0 = U_0$ et $U^1 = U_1$), donc $U^n = U_n$ pour tout $n \in \quad \mathbb{N}$ (vérification évidente par récurrence)
4. On a $\det U_n = \det(U^n) = (\det U)^n = (-1)^n$. Comme $U_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_n & f_n\sqrt{5} \\ f_n\sqrt{5} & g_n \end{pmatrix}$, on a donc

$$\boxed{(-1)^n = \det(U_n) = \frac{1}{4}(g_n^2 - 5f_n^2)}$$

5. On a $U_{p+q} = U^{p+q} = U^p\; U^q = U_p\; U_q$. En explicitant ces matrices comme dans la question **4.** ci-dessus, on obtient les relations

$$\boxed{f_{p+q} = \frac{1}{2}\,(f_p\; g_q + f_q\; g_p), g_{p+q} = \frac{1}{2}\,(5\; f_p\; f_q + g_p\; g_q)}$$

6. Si $U_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U_n^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} \frac{g_n x + \sqrt{5} f_n y}{2} = X \\ \frac{\sqrt{5} f_n x + g_n y}{2} = Y \end{cases}$. Le déterminant du système est celui de U_n donc $(-1)^n$. le numérateur de x est det $\begin{pmatrix} X & \sqrt{5}f_n/2 \\ Y & g_n/2 \end{pmatrix} = \frac{g_n X - \sqrt{5} f_n Y}{2}$ et de même celui de y est $\frac{-\sqrt{5} f_n X + g_n Y}{2}$. On trouve

$$U_n^{-1} = (-1)^n\,(-f_n\; J + \frac{1}{2}\; g_n\; I)$$

7.Par récurrence .on note x l'une des racines simples de $X^2 - X - 1$ (on peut faire le calcul en remplaçant x par sa valeur mais cela ne simplifie pas les choses)

- $P_2 = X^2 - X - 1$ est divisible par lui même
- Si $X^2 - X - 1$ divise $P_n(X)$ alors $P_n(x) = 0$ donc $x^n = f_n x + f_{n-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= x^{n+1} - f_{n+1} - f_n = f_n x^2 + f_{n-1}x - f_{n+1}x - f_n \\ &= f_n(x^2 - x - 1) \text{ car } f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \\ &= 0 \text{ car } x \text{ est racine de } X^2 - X - 1 \end{aligned}$$

les racines de $X^2 - X - 1$ sont simples et sont racines de $P_{n+1}(X)$

- par récurrence:

$$\boxed{(X^2-X-1) \text{ divise } P_n}$$

8. $P_2(U)=U^2-U-I=0$ a déjà été prouvé à la question 2.
9. Soit alors Q_n le quotient de P_n par P_2 . On a alors $C_n=P_n(U)=Q_n(U)P_2(U)=0$
On a donc $U_n=f_nU+f_{n-1}I$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_n & f_n\sqrt{5} \\ f_n\sqrt{5} & g_n \end{pmatrix}=f_n\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}+f_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n>2\ ,\ g_n=f_n+2f_{n-1}}$$

le résultat $g_{n+1}=f_{n+1}+2f_n$ est même vrai pour $n\in\mathbb{N}$
10.

$$U_{2n}-g_nU_n+(-1)^nI=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}g_{2n}-\frac{1}{2}g_n^2+(-1)^n & \frac{1}{2}(f_{2n}-g_nf_n)\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}(f_{2n}-g_nf_n)\sqrt{5} & \frac{1}{2}g_{2n}-\frac{1}{2}g_n^2+(-1)^n \end{pmatrix}$$

on doit voir que la relation de la question **5.** simplifie le terme non diagonaux , et on essaie alors pour les autres.
les relations $f_{p+q}=\frac{1}{2}(f_pg_q+f_qg_p)$ et $g_{p+q}=\frac{1}{2}(5f_pf_q+g_pg_q)$ donnent pour $p=q=n$: $f_{2n}=f_ng_n$ et $g_{2n}=\frac{1}{2}\left(5f_n^2+g_n^2\right)$ ..
Et donc

$\frac{1}{2}g_{2n}-\frac{1}{2}g_n^2+(-1)^n=\frac{1}{4}(5f_n^2-g_n^2)+(-1)^n=0$ d'après la question **4.**
$\frac{1}{2}(f_{2n}-g_nf_n)\sqrt{5}=0$

$$\boxed{U_{2n}-g_nU_n+(-1)^nI=0}$$

11. Le quotient Q est de degré $2n-2$, et le reste R est de degré inférieur ou égal à 1.
On vient de montrer que $A(U)=0$ et on sait que $P_2(U)=0$ donc comme $A(U)=Q(U)P_2(U)+R(U)$ on en déduire $R(U)=0$
Or d'après le degré on peut poser $R(X)=aX+b$ et donc $AU+bI=0$. On vérifie que (U,I) est un système libre et donc $a=b=0$ donc $R=0$.

$$\boxed{X^2-X-1 \text{ divise } X^{2n}-g_nX^n+(-1)^n}$$

Deuxième partie

12. Dans un premier temps on pense à la somme d'une série géométrique $S_n=\sum_{k=0}^n U^{2k}$ donc $S_n(I-U_2)=(I-U_{2n+2})$. mais on obtient ainsi α_n et β_n en fonctions de f_{2n+2} et g_{2n+2} :échecs
On peut écrire pour $k\geq 1$: $U_{2k}=U_{2k+1}-U_{2k-1}$ et donc $\sum_{k=0}^n U_{2k}=U_0+\sum_{k=1}^n(U_{2k+1}-U_{2k})=U_0-U_1+U_{2n+1}$.
En prenant les coefficients de la matrice on a donc :

$$\boxed{\beta_n=g_{2n+1}+1\ ,\alpha_n=f_{2n+1}-1}.$$

13. Une division euclidienne donne

$$X^6-4X^3-1=(X^4+X^3+2X^2-X+1)(X^2-X-1)$$

On peut utiliser les racines de X^2-X-1 mais le calcul avec les $\sqrt{5}$ est pénible.
14. On a donc comme $U^2-U-I=0$: $U^6-4U^3-1=0$ (idem question **9.**) . on multiplie alors par U^p .
15. Vue la relation $U_n=U^n$ il suffit encore un fois de regarder les coefficients.
16. Soit l'ensemble des suites réelles $X=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+2}=4\,x_{n+1}+x_n\ .$$

On sait que cet ensemble est un espace vectoriel de dimension 2 . Il contient les suites $(f_{3n}),(g_{3n})$ et (t_n) . pour exprimer (t_n) en fonction de (f_{3n}) et (g_{3n}) il suffit de montrer que ces deux suites forment une famille libre . Or

$$\alpha(f_{3n})+\beta(g_{3n})=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha f_0+\beta g_0=0\\ \alpha f_3+\beta g_3=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\beta=0\\ 3\alpha+7\beta=0\end{array}\right.\Longrightarrow\beta=0$$

Donc il existe des réels λ et μ tels que $(t_n)=\lambda(f_{3n})+\mu(g_{3n})$. On détermine λ et μ grâce aux termes $n=0$ et $n=1$: $\lambda=1$ et $\mu=\frac{1}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n\in\ \ \mathbb{N}\ ,\ t_n=u_n+\frac{1}{2}v_n=f_{3n}+\frac{1}{2}g_{3n}}$$

la partie 3 étudie les séries entières $\sum f_nx^n$ et $\sum g_nx^n$