d'après Mines Pont PSI 2004

Le but de ce problème est l'étude de deux suites réelles $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soient $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies chacune par leurs deux premiers éléments et la mê relation de récurrence ci-dessous :

$$\begin{array}{llll} F & : & f_0 = 0, \quad f_1 = 1, & \text{pour tout entier naturel } n, \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ ; \\ G & : & g_0 = 2, \quad g_1 = 1, & \text{pour tout entier naturel } n, \ g_{n+2} = g_{n+1} + g_n. \end{array}$$

Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; soient I la matrice unité et J la matrice carrée défin par les relations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, soit U_n la matrice définie par la relation suivante :

$$U_n = f_n \ J + \frac{1}{2} g_n I.$$

Soient U la matrice U_1 $\left(U = U_1 = J + \frac{1}{2}I\right)$ et E le sous-espace vectoriel de M_2 engendré par les deux matrices I et J

Première partie

Le but de cette partie est l'étude alternée des deux suites de réels et de la suite des matrices ; elle permet d'obtenir d résultats préliminaires.

Quelques propriétés :

1. a)Calculer JU et vérifier que cette matrice est dans E .

b) Montrer $U^2 = U + I$.

c)Démontrer que la suite des matrices $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où U^n est la matrice U élevée à la puissance n, (avec la conventi habituelle $U^0 = I$), appartient à l'espace vectoriel E.

2. a)Établir une relation qui, pour tout entier naturel n, lie les matrices U_{n+2}, U_{n+1} et U_n.

b) Montrer que la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence.

Caractérisation de la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; quelques conséquences :

3. Comparer, pour tout entier p compris entre 0 et 2 $(0 \le p \le 2)$ les matrices U_p et U^p. Démontrer qu'il existe, po tout entier naturel n, une relation simple entre les matrices U_n et U^n.

4. Déduire du résultat précédent les relations suivantes :$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \det U_n = (-1)^n, \quad (g_n)^2 - 5\ (f_n)^2 = 4(-1)^n.$

5. Étant donnés deux entiers naturels p et q, exprimer les termes f_{p+q} et g_{p+q} des suites F et G en fonction des tern f_p, g_p, f_q et g_q de ces mêmes suites.

Inverse des matrices U_n :

6. Déterminer l'inverse de la matrice U_n en fonction des matrices I et J et des réels f_n et g_n

Des polynômes annulés par la matrice U

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k = p_0 + p_1 X + P_2 X^2 + \cdots$ est un polynôme et si M est une matrice $2x2$ on pose $P(M)$ $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k M^k = p_0 I + p_1 M + p_2 M^2$

On utilisera,sans les justifier, les règles de calcul

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]^2 \ , \ (P+Q)(M) = P(M) + Q(M) \text{ et } (PQ)(M) = P(M)Q(M)$$

Soit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante :

$$P_n(X) = X^{\ n} - f_n\ X - f_{n-1}.$$

7. Démontrer que le polynôme $P_n(X)$ est divisible par le polynôme P_2.

8. Montrer $P_2(U) = 0$

9. Calculer pour $n \geq 2$: la valeur de la matrice $C_n = U^{\ n} - f_n\ U - f_{n-1} I$.
quelle relation entre (f_n) et (g_n) en déduit-on. ?

Divisibilité du polynôme $A(X) = X^{\ 2\ n} - g_n\ X^{\ n} + (-1)^n$ par $P_2(X)$:
Soit toujours n un entier supérieur ou égal à 2 .
10. Montrer

$$U_{2n} - g_n\ U_n + (-1)^n\ \ I = 0.$$

11. Soient Q et R les polynômes obtenus en effectuant la division euclidienne du polynôme$A(X)$ par le polynôme $P_2($

$$A(X) = Q\,(X)\,P_2(X) + R\,(X)\,.$$

Préciser les degrés des polynômes Q et R.
Démontrer, en utilisant le résultat de la question10 , que le polynôme $X^{\ 2\ n} - g_n\ X^{\ n} + (-1)^n$ est divisible par $X^{\ 2} - X -$

Deuxième partie

Le but de cette partie est l'étude de propriétés de suites construites à partir des deux suites F et G.

Un calcul de sommes :
12.On pose :

$$\begin{aligned}\alpha_n &= f_0 + f_2 + \ldots + f_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} f_{2\ k}.\\ \beta_n &= g_0 + g_2 + \ldots + g_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} g_{2\ k}.\end{aligned}$$

Déterminer les expressions simples de α_n et de β_n en fonction respectivement de f_{2n+1} et de g_{2n+1} en considérant
exemple la matrice S_n définie par la relation suivante :

$$S_n = U_0 + U_2 + \ldots + U_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} U_{2\ k}.$$

Soit T la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\ t_{n+1} + t_n.$$

Détermination des éléments t_n de la suite T à l'aide des réels f_n et g_n.
13. Démontrer que le polynôme $X^{\ 6} - 4\ X^{\ 3} - 1$ est divisible par le polynôme $X^{\ 2} - X - 1$.

14. En déduire que la matrice U vérifie, pour tout entier naturel p, la relation suivante :

$$U^{\ 6+p} = 4\ U^{\ 3+p} + U^{\ p}.$$

15. Déduire de la relation précédente que les termes des suites F et G vérifient, pour tout entier naturel p, les relati
suivantes :

$$f_{6+p} = 4\ f_{3+p} + f_p, \quad g_{6+p} = 4\ g_{3+p} + g_p.$$

16. Déduire des résultats précédents l'expression du terme général t_n de la suite T, définie par les relations suivantes

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\ t_{n+1} + t_n,$$

en fonction de termes des suites F et G.

FIN DU PROBLÈME