CENTRALE PC 2006 Math 2
PARTIE I : un exemple pratique

I.A) On se ramène sans problème à l'équation réduite de (E):

$$4x^2+5y^2-4Ry=0 \Leftrightarrow 4x^2+5\left(y-\frac{2R}{5}\right)^2=\frac{4R^2}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{R}{\sqrt{5}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{2R}{5}\right)^2}=1$$

. Donc, (E) est l'ellipse de centre $\Omega(0,\, 2R/5)$, de grand axe $(\Omega,\, i)$ et de petit axe $(\Omega,\, j)$, Ces axes fournissent les axes de symétrie orthogonale demandés.

I.B) On a

$$\left(4x^2+5y^2-4Ry\right)^2-4(x^2+y^2-R^2)=(y-2R)^2$$

qui est positif en tout point de;$\mathbb{R}^2$.
Si l'ellipse et le cercle se coupent il existe un point (x,y) tel que l'expression précédente soit nulle . On a donc $y=2R$ et donc en reportant : dans l'équation du cercle : $x^2+3R^2=0$. Les deux courbes ne se coupent pas . Donc par continuité l'une est incluse dans l'autre. Or l'origine est un point de la conique intérieur à l'ellipse.

$\boxed{\text{(E) est incluse dans l'intérieur strict de (C)}}$

I.C)

I.C.1) On calcule l'intersection de la droite et de l'ellipse :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+m' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+m')^2}{b^2}-1=0 \\ y=mx+m' \end{cases}$$

Le nombre de points d'intersection est donc égal au nombre de racines de la première équation .
Comme on a trinôme du second degré (le coefficient de x^2 est $\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\neq 0$) , on a une unique racine si et seulement si on a une racine double donc si et seulement si l'expression et sa dérivée son nulles. Ce qui donne l'expression du sujet.
Soit x_0 une solution du système si elle existe et $y_0=mx_0+m'$. La première condition dit que $(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$, la seconde dit que $\frac{x_0}{a^2}+m\frac{y_0}{b^2}=0$. donc que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est orthogonal au gradient de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ au point (x_0,y_0) . La droite $y=mx+1$ passe par le point et est orthogonal au gradient. C'est bien la tangente.
Remarque : On a étudié toutes les droites , sauf les droites verticales . mais une droite $x=Cste$ coupe $\mathcal{E}$ en un seul point si et seulement si $x=\pm a$ ce qui équivaut à dire qu'elle est tangente à l'ellipse.$\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ ...

I.C.2) On se ramène à **I.C.1)** en prenant un repère dans la quelle l'elipse a une équation réduite .

$\boxed{\text{Si une droite coupe une ellipse en un seul point, elle est tangente à l'ellipse}}$

remarque : il n'y a pas grand chose à changer pour montrer que c'est une équivalence :Si une droite $y=mx+m'$ est tangente à l'ellipse en (x_0) , elle passe par un point (x_0, mx_0+m') de l'ellipse et en ce point le gradient est orthogonal au vecteur directeur
Le résultat tombe en défaut pour les deux autres types de coniques propres ::

- pour uneparabole prendre une droite parallèle à l'axe
- pour une hyperbole prendre une droite parallèle à une asymptote.

  Pour une hyperbole (par exemple $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$), le problème vient du fait que le coefficient de x^2 est $\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}$, qui peut s'anuler ... l'équation n'est plus du second degré.

I.C.3)

- on a $4x^2+5y^2-4Ry=4x^2+5(R-x)^2-4R(R-x)=9x^2-6Rx+R^2=9\left(x-\frac{R}{3}\right)^2$. on a une unique racine $x=\frac{R}{"}$ donc $y=\frac{2R}{3}$.

  La droite est tangente à l'ellipse en $\left(\frac{R}{3},\frac{2R}{3}\right)$

- calcul du même type : La droite est tangente à l'ellipse en $\left(-\dfrac{R}{3},\dfrac{2R}{3}\right)$

cf figure 1

I.D) En posant $t=\tan(\phi/2)$ avec $\phi\in]-\pi,\pi[$ on a $\overrightarrow{OM(t)}=\cos(\phi)i+\sin(\phi)\,j$. on obtient tous les points du cercles sauf $\phi=\pi$, donc tous les points sauf A_3 .
D'autre part sur l'intervalle choisi ϕ est bijective de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. tout point du cercle étant défini de façon unique par son angle polaire $\in]-\pi,\pi]$,

$$\boxed{\text{on a une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur (C)} - \{A_3\}}$$

I.E) On vérifie que les deux points $M(t)$ et $M(u)$ sont sur la droite . donc par symétrie que $M(t)$ est sur la droite :

$$(1-tu)\frac{1-t^2}{1+t^2}+(t+u)\frac{2t}{1+t^2}-(1+tu)=0$$

soit

$$(1-tu)(1-t^2)+(t+u)(2t)-(1+t^2)(1+tu)=0$$

il suffit de développer pour conclure.

I.F)

I.F.1) Le cercle est symétrique par rapport à Oy.Pour γ il faut donc exclure le symétrique de A_3 donc A_1.
On a alors deux points symétriques ssi la droite qui les joint est horizontale ; Donc ssi $p=1$.

$$\underline{\text{Sauf si } M=M(0)=A_1,\ \widehat{M} \text{ est le point de paramètre } 1/t}$$

On veut donc que la droite $M(u)M(\widehat{t})$ passe par A_0 . On veut donc

$$(1-\frac{u}{t})R+(u+\frac{1}{t})(2R)-R(1+\frac{u}{t})=0$$

le calcul donne alors $u=\dfrac{1}{1-t}$

I.F.2) On a $p=t/(1-t)$, d'où $p\neq-1$ et $t=\dfrac{p}{p+1}$. donc $s=t+\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{p}{1+p}+(1+p)$. D'où

$$(p+1)s=p^2+3p+1$$

En multipliant par $(1+p)\neq 0$ on a une équation de $M(t)\,M(u))$ d'après **I.E)**

$$(1-p^2)x+(p^2+3p+1)y-(1+p)^2R=0$$

- on a donc si $p\neq 1$ (et donc $p^2\neq 1$) $x=\dfrac{(1+p)^2R-(p^2+3p+1)y}{1-p^2}$ donc en reportant dans l'équation de l'ellipse :

$$4\left(\frac{(1+p)^2R-(p^2+3p+1)y}{1-p^2}\right)^2+5y^2-4Ry=0$$

  En développant on obtient une équation en de degré 2 ayant une racine double : (avec aide de la machine)

$$x=(1-p^2)R/(3p^2+4p+3),\ y=2R(1+p)^2/(3p^2+4p+3)$$

  la sujet ne demande pas la racine : on peut s'arréter à $\Delta=0$

- et si $p=1$ on a $y=4R/5$ et $M(t)M(u)$ horizontale : c'est la tangente au sommet à l'allipse.

$$\boxed{\text{La droite } M(t)\,M(u)) \text{ est donc bien tangente à E)}}$$

- *si on exprime y en fonction de x on doit diviser par p^2+3p+1 ... et les racines en p du trinôme compliquent les choses.*

I.F.3) Soit $A \notin \{A_1,\, A_2,\, A_3\}$, C'est-à-dire $A = M(t)$,:
On peut alors considéré $u = \dfrac{1}{1-t}, v = \dfrac{1}{1-u} = \dfrac{t-1}{t}$ et remarquer que alors $\dfrac{1}{1-v} = t$.
D'après **I.F.2)** la droite $M(t)M(u)$ est tangente à l'ellipse et de même $M(u)M(v)$ et $M(v)M(t)$ sont tangente à l'ellipse.
Donc $A = M(t), A' = M(u), A" = M(v)$ répond à la question posée.
Reste à faire une construction géométrique comme demandé dans le sujet :
Partant de A On prend le symétrique $\widehat{A}$ par rapport à Oy . A' est l'intersection de $A_0\widehat{A}$ avec le cercle (C) . Et de même pour passer de A' à A". En conclusion, le triangle $AA'A''$ est inscrit dans (C) et circonscrit à (E). Enfin, si on part par exemple de A, on construit un triangle $AA'A$" inscrit dans (C) et circonscrit à(E).(figure 2)
Dans le cas de A_1, A_2, A_3 on a vu au **I.C.3) figure 1** que le triangle a la même propriété.

Partie II : correspondances algébriques

II.A) Soit $(a,\, b)$ les coordonnées de A. Alors d'après **I.E)**

$$A\in (M(t)\, M(u)) \iff (1-p)a + sb - R(1+p) = 0 \iff (a+R)p - bs + R - a = 0$$

Cela définit bien en général une $1-$correspondance. Le seul cas particulier est le cas où $v_1 = v_2 = 0$ donc $a = -R, b = 0$ donc si on prend A_3
$M(t)\mathcal{R}M(u) \iff s = 0$ est bien une $1-$correspondance qui n'est pas de cette forme.($a = R = -R$ est absurde)
II.B)

II.B.1) On a $d^2 = \dfrac{|ax+by-c|^2}{a^2+b^2} = \dfrac{(\alpha a - c)^2}{a^2+b^2}$
II.B.2) La droite $M(t)\, M(u))$ est tangente à (Γ) si et seulement si le carré de la distance de Ω à $M(t)\, M(u))$ est égal au carré du rayon : :

$$\frac{((1-p)\alpha - R(1+p))^2}{(1-p)^2 + s^2} = r^2$$

soit

$$(-p(\alpha+R) + (\alpha - R))^2 - r^2\left((1-p)^2 + s^2\right) = 0$$

. On obtient alors la relation demandée en développant

$$\left(\{\alpha+R\}^2 - r^2\right)p^2 - r^2 s^2 + 2(R^2 - \alpha^2 + r^2)p + \left((\alpha-R)^2 - r^2\right) = 0$$

On a bien une $2-$correspondance car le coefficient du terme en s^2 est $\neq 0$.

II.C) Si $\mathcal{R}$ est associée à un polynôme P de la forme ci dessus, $M(t)\mathcal{R}M(t)$ si et seulement si $P(2t,\, t^2) = 0$. Or on a un polynôme en t de degré au plus 4.On a donc un nombre fini de t tels que $M(t)\mathcal{R}M(t)$ sauf si $P(2t, t^2)$ est le polynôme nul.
or :

$$P(t, 2t) = 4u_{1,1}t^2 + 4u_{1,2}t^3 + u_{2,2}t^4 + 2v_1 t + v_2 t^2 + w$$

donc en regardant les coefficients : $u_{1,1} = 0, u_{1,2} = 0, v_2 = -4u_{1,1}, v_1 = 0, w = 0$. Et donc $P(t) = u_{1,1}(x^2 - 4y)$, Réciproquement tout polynôme $\underline{P(t) = \lambda(x^2 - 4y)}$ avec $\lambda \neq 0$ définit une $2-$ correspondance telle que pour tout t $M(t)\mathcal{R}M(t)$.On a même $M(t)\mathcal{R}\ M(u) \iff t = u$.

Partie III : l'alternative de Poncelet

pour éviter le cas particulier $i = 4$ on convient que $t_5 = t_1$
III.A) pour chaque $i \in [[1, 4]]$, le segment A_iA_{i+1} est une corde du cercle (C) et son support est tangent à (Γ):
le quadrilatère $M(t_1)\ldots M(t_4)$ est inscrit dans (C) et circonscrit à (Γ). avec comme cas particulier : si les 2 points sont confondus, la tangente en ce point à (C) est aussi tangente à (Γ)
Si on prend comme quadrilatère un carré (Γ) sera le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, et il existe alors une infinité de carré solution.
Si (C) est strictement inclus dans l'intérieur de (Γ) , toute tangente à (Γ) ne peut pas couper (C) : le problème est impossible.
III.B)

III.B.1) Cette famille est liée si et seulement si $V(t) \wedge W(t) = \overrightarrow{0}$ soit $\begin{pmatrix} t-u \\ u^2 - t^2 \\ t^2 u - u^2 t \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$, ce qui équivaut à $\boxed{t = u}$.

III.B.2) Si $P(t)=at^2+bt+c, Q(t)=dt^2+et+f, R(t)=gt^2+ht+i.$ alors $W(t)=\left(\begin{array}{c} at^2+bt+c \\ dt^2+et+f \\ gt^2+ht+i \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right)V(t).$
Cette matrice est unique car si on prend une autre solution $\mathcal{B}$, les trois coordonnées de $\mathcal{B}V(t)$ sont des polynômes de degré au plus 2 , égaux à P,Q,R et donc ont mêmes coefficients.

$$\boxed{\exists!\mathcal{A},\forall t,,\ W(t)=\mathcal{A}V(t)}$$

III.B.3) On constate alors que ${}^t\mathcal{A}$ est la matrice de $(P,\ Q,\ R)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$rg(A)=rg(P,Q,R)$$

Si la famille $(P,\ Q,\ R)$ est libre $\mathcal{A}$ est inversible et conserve le rang donc d'après **III.B.1)**, $\underline{rg(W(t),\ W(u))=1 \text{ si et seulement si } t\neq u}$.

III.B.4)

III.B.4;a) Si $(P,\ Q,\ R)$ est de rang 2, $\mathcal{A}$ est aussi de rang 2,le noyau n'est pas réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et est de dimension 1. 0 en est valeur propre de $\mathcal{A}$ et le sous espace propre est une droite. On peut en choisir une base $X_0=\left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right)$. $(W(t),\ W(u))$ est liée si et seulement si il existe α et β non tous nuls $\alpha W(t)+\beta W(u)$ et donc tels que $\alpha V(t)+\beta V(u)\in \text{Vect}\,(X_0)$ soit si et seulement si il existe γ tel que $\alpha V(t)+\beta V(u)=\gamma X_0$.
Les trois vecteurs $V(t),V(u),X_0$ sont liés . Et réciproquement si ils sont liés il existe une combinaison linéaire à coefficients non nuls du type précédent. et $\alpha=\beta=0$ est alors absurde car $X_0\neq 0$.

$$\boxed{(V(t),V(u)) \text{ sont liés si et seulement si } \left|\begin{array}{ccc} a & t^2 & u^2 \\ b & t & u \\ c & 1 & 1 \end{array}\right|=0}$$

.

III.B.4.b) Par Pivot de gauss $C_3-C_2->C_3$ permet de factoriser $t-u$ et en développant on arrive à $(t-u)(cp-bs+a)=0$. Soit alors la relation définie par $M(t)\mathcal{R}\,M(u) \iff cp-bs+a=0$. $\mathcal{R}$ est une $1-$correspondance si et seulement si v_1 ou v_2 est non nul soit $X_0\neq\left(\begin{array}{c} a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$.

Le cas à exclure se produit si et seulement si $\mathcal{A}\times\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)=0$ c'est à dire si et seulement si la première colonne de $\mathcal{A}$ est nulle.

$$\boxed{\text{On a une } 1- \text{ correspondance si et seulement si l'un des polynômes est exactement de degré 2}}$$

III.C.1) On a en développant $P(s,\ p)=(At^2+2Bt+C)u^2+2(Bt^2+Ct+Dt+E)u+\left(Ct^2+2Et+F\right)$.

- Dans le cas de l'exemple 1, $(t+u)^2-4tu=u^2-2tu+t^2$; alors $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}=\{1,\ -2X,\ X^2\}$ est de rang 3.
- Dans celui de l'exemple 2, on obtient $\mathcal{A}=\left(\begin{array}{ccc} -\beta^2 & 0 & \beta^2 \\ 0 & -2\alpha^2 & 0 \\ \beta^2 & 0 & -\beta^2 \end{array}\right)$, de rang 2. Ainsi, on peut choisir $\mathrm{X}_0=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$ et la $1-$correspondance associée est $M(t)\mathcal{R}_0\,M(u) \iff p+1=0$, C'est-à-dire (cf **I.F.1)** $M(t)\mathcal{R}_0\,M(u)$ si et seulement si $M(t)$ et $M(u)$ sont diamétralement opposés.

III.C.2) Par définition même des P_i

$$P_1(u_2)u^2+2P_2(u_2)u+P_3(u_2)=0 \iff P(u+u_2,u+u_2)=0\Leftrightarrow u\mathcal{R}u_2$$

III.C.3)

III.C.3.a) On reprend l'exemple du **II.B.2)**. : 2 points de γ sont en relation si et seulement si la droite qui les joints (ou la tangente si les points sont confondus) est tangente au cercle (Γ)
Or l'équation du **III.C.2** est une équation du second degré (si $P_1(u_2)\neq 0$) de discriminant $4\left(P_2^2-P_1P_2\right)$.
donc

- $\Delta > 0$ si et seulement si il existe deux tangentes au cercle (Γ) passant par $P(u_2)$, donc $P(u_2)$ est à l'extérieur de (Γ)
- $\Delta = 0$ ou $P_1(u_2) = 0, P_2(u_2) \neq 0$, si et seulement si il existe une unique tangente au cercle passant par $P(u_2)$ et donc $P(u_2) \in (\Gamma)$
- $\Delta < 0$ ou $P_1(u_2) = 0, P_2(u_2) = 0$ $P_3(u_2) \neq 0$ si et seulement si il n'existe pas de tangente au cercle passant par $P(u_2)$ et donc $P(u_2)$ intérieur (strictement) à (Γ)

On peut donc traduire géométriquement la question :

- $\Delta(t) < 0$ est toujours vrai si (Γ) étant incluse dans l'intérieur strict de (C). Dans ce cas, il n'y a aucun 4–cycle.
- $\Delta(t) \geq 0$ n'est vrai que pour $t = 0$ si (Γ) tangente intérieurement à (C) au point $A(0)$. Dans ce cas, l'équation en u n'a pas de racine réelle pour $t \neq 0$ et a une racine double 0 pour $t = 0$: le seul 4–cycle est alors (0, 0, 0, 0).

L'hypothèse $P_1(t_0) \neq 0$ se comprend avec l'étude de l'exemple.
III.C.3.b) Par continuité des fonctions Δ et P_1il existe un voisinage de t_0 sur lequel les fonctions n'ont pas de racines et donc $\mathcal{I}_0$ existe.
L'équation du **III.C.2)** est alors, pour tout $t \in \mathcal{I}_0$, de degré exactement 2 et possède deux racines réelles distinctes.

III.C.3.c) Si $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ est libre, si $t \in \mathcal{I}_0$ et si par exemple $t,\ t',\ t'',\ t'''$ est un 4–cycle, avec des paramètres distincts, alors les équations (en u) $P_1(t)u^2 + 2P_2(t)u + P_3(t) = 0$ et $P_1(t'')u^2 + 2P_2(t'')u + P_3(t'') = 0$ ont les deux mêmes racines $t' \neq t'''$. Les deux équations sont proportionnelles et donc les vecteurs $W(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}$ et $W(t'') = \begin{pmatrix} P_1(t") \\ P_2(t") \\ P_3(t") \end{pmatrix}$ sont liés. D'après le **III.B.3)** , on en déduit $t = t''$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{si } (P_1, P_2, P_3) \text{ est de rang 3 , il n'existe pas de 4-cycle formé de 4 points distincts}}$$

III.C.3.d) Si $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ est de rang 2, on lui associe $\mathcal{R}_0$ comme en **III.B.4.b)**. En outre, si $t_1 \in \mathcal{I}_0$ et $M(t_1)\mathcal{R}_0\,M(t_2)$ alors les équations $P_1(t_1)u^2 + 2P_2(t_1)u + P_3(t_1) = 0$ et $P_1(t_2)u^2 + 2P_2(t_2)u + P_3(t_2) = 0$ ont deux racines distincts $u_1 \neq u_2$ en commun car elles sont alors proportionnelles (car $W(t)$ et $W(u)$ le sont) Alors, $\underline{t_1,\ u_1,\ t_2,\ u_2 \text{ est un 4–cycle}}$.
Comme le cardinal de $\mathcal{I}_0$ est infini et qu'on ne peut avoir $M(t)\mathcal{R}_0\,M(t)$ que pour un nombre fini de valeurs de t sauf dans le cas exceptionnel du **II.C).**
Mais si on est dans ce cas l'expression obtenue pour le polynôme P permet de vérifier que $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ est de rang 1,(absurde).

$$\boxed{\text{On peut choisir d'une infinité de façons un 4–cycle formé de paramètres distincts.}}$$

III.C.4)

III.C.4.a) La matrice $\mathcal{A}$ est dans ce cas égale à $\begin{pmatrix} A & 0 & C \\ 0 & D & 0 \\ C & 0 & F \end{pmatrix}$, avec $A = (R+\alpha)^2 - r^2$, $C = -r^2$, $D = R^2 - \alpha^2$ et $F = (R-\alpha)^2 - r^2$ et le déterminant en est $D(AF - C^2)$, ce qui conduit à l'expression demandée. On aura donc établi le résultat si on montre que $\mathcal{A}$ n'est jamais de rang ≤ 1. Or $C \neq 0$, donc si $D \neq 0$, les deux premières colonnes sont libres , et si $D = 0$ $\alpha = \pm R$ et on vérifie que $AF - C^2 \neq 0$ et donc que les colonnes 1 et 3 sont libres.
III.C.4.b) On a $\alpha = \pm R$ si et seulement si (Γ) est centré en A_1 ou en A_3.
... ? Je ne vois pas comment faire cette question géométriquement en se limitant au programme PCSI + PC