CCP PSI – 2002-Maths 2

PARTIE I

I.1.1. Sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, (E_0) équivaut à $y''-y=0$ et donc :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_0) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ (ou }]0,+\infty[\text{) est } y=\lambda e^x+\mu e^{-x}\ ,\ (\lambda,\mu)\in\ \mathbb{R}^2}$$

I.1.2. Les fonctions $y=\lambda e^x+\mu e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\ \mathbb{R}^2$ sont même solutions sur $\mathbb{R}$ entier.

On peut vérifier qu'il n'y en a pas d'autres : Soit f solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, il existe $(\lambda,\lambda',\mu,\mu')$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^x+\mu e^{-x} & \text{si } x<0\\ \lambda' e^x+\mu' e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

et la continuité de f en 0 donne $\lambda+\mu=\lambda'+\mu'$ et $f(0)=\lambda+\mu$, la continuité de sa dérivée en 0 donne $\lambda-\mu=\lambda'-\mu$
Soit $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'$

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_0) \text{ sur } \ \mathbb{R} \text{ est } y=\lambda e^x+\mu e^{-x},(\lambda,\mu)\in\ \mathbb{R}^2}$$

I.2.1. En tant que somme d'une série entière, y est de classe C^∞ sur $]-R,R[$

Si y est solution de (E_n) pour $n\geq 2$, on a en prenant $x=0$ dans l'équation : $y(0)=0$. Donc $u_0=0$

Si on dérive (E_n) on a $2xy"(x)+x^2y^{(3)}(x)-2xy(x)+(n-n^2-x^2)y'(x)=0$, et la valeur en 0 donne $u_1=y'(0)=0$

$$\boxed{u_0=u_1=0.}$$

I.2.2. On peut dériver termes à termes une série entière sur $]-R,R[$. On a donc pour $|x|<R$ en dérivant et en reportant dar (E_n) :

$$\begin{aligned} x^2y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)u_kx^k \quad , \quad x^2y(x)=\sum_{k=0}^{n}u_kx^{k+2}=\sum_{k=2}^{\infty}u_{k-2}x^k\\ \text{donc} \quad &: \quad \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)u_kx^k+\left(n-n^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}u_kx^k-\sum_{k=2}^{\infty}u_{k-2}x^k\end{aligned}$$

On identifie sans problème le coefficient de x^k pour $k\geq 2$ (et on retrouve $u_0=u_1=0$ pour $k<2$)

$$\boxed{\forall k\geq 2\quad \left(k(k-1)+(n-n^2)\right)u_k=u_{k-2}.}$$

$\left(k(k-1)+(n-n^2)\right)$ est un trinôme en k du second degré de racines n et $(1-n)$ donc $k(k-1)+(n-n^2)$: $(k-n)\,(k+n-1)$

I.2.3. Pour $k\in[\![2,n-1]\!]$, on a $(k-n)(k+n-1)\neq 0$ et donc

$$u_k=\frac{u_{k-2}}{(k-n)(k+n-1)}.$$

Comme $u_0=u_1=0$ d'après **I.2.1.**, une récurrence fournit :

$$\boxed{\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad u_k=0}$$

I.2.4. En particulier, $u_{n-1}=0$; donc $u_{n+1}=\frac{u_{n-1}}{2n}=0$ et plus généralement pour $k>n$ $(k-n)(k+n-1)\neq 0$ et donc on toujours

$$u_k=\frac{u_{k-2}}{(k-n)(k+n-1)}$$

En remplaçant k par $n+2p+1$ dans la relation précédente on trouve :

$$\forall p\in\mathbb{N}\quad u_{n+2p+1}=\frac{u_{n+2p-1}}{(2p+1)(2p+2n)}$$

d'où, toujours par récurrence,

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}\quad u_{n+2p+1}=0}$$

I.2.5. Par contre si $k=n$ il reste $0.u_n = u_{n-2}$ soit $0=0$. On ne peut pas calculer explicitement u_n en utilisant $k=n$.
si $k=n+2$ on a $u_{n+2} = \frac{u_n}{2.(2n+1)}$ et plus généralement :

$$u_{n+2p} = \frac{1}{2.4.\cdots(2p)}.\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2p-1)}u_n$$

On peut donc exprimer tous les autres termes de la série en fonctions de u_n , sans restriction sur u_n .

$$\boxed{\text{On ne peut pas calculer } u_n}$$

I.2.6. Si on pose $\alpha_p = \frac{1}{2.4.\cdots(2p)}.\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2p-1)}$, $y(x)$ est de la forme :

$$y(x) = u_n x^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p x^{2p}$$

La règle de D'Alembert donne ($\alpha_p \neq 0$) pour $x \neq 0$: $\left|\frac{\alpha_{p+1}x^{2p+2}}{\alpha_p x^{2p}}\right| = \frac{x^2}{(2p+2)(2p+2n+1)}$ de limite nulle si p tend vers $+\infty$
Par conséquent, la série entière a un rayon de convergence infini.

$$\boxed{R=+\infty.}$$

On peut exprimer α_p à l'aide de factoriels :

$$\begin{aligned}
\alpha_p &= \frac{1}{2.4.\cdots(2p)}.\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2p-1)} \\
&= \frac{1}{2.4.\cdots(2p)}.\frac{1.3.\cdots(2n-1)}{1}.\frac{1}{1.3.\cdots(2n+2p-1)} \\
&= \frac{1}{2.4.\cdots(2p)}.\frac{(2n)!}{2.4.\cdots(2n)}.\frac{2.4.\cdots(2n+2p)}{(2n+2p)!} \\
&= \frac{1}{2^p p!}.\frac{(2n)!}{2^n n!}.\frac{2^{n+p}(n+p)!}{(2n+2p)!} = \frac{(2n)!(n+p)!}{p!.n!(2n+2p)!}
\end{aligned}$$

I.3.1. Par définition,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad C_{k,0} = \frac{1}{(2k)!} \quad \text{et} \quad C_{k,1} = \frac{2(k+1)}{(2k+2)!} = \frac{1}{(2k+1)!}$$

Ce sont des développements en série entière usuels :

$$\boxed{\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch} x \quad \textit{et} \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sh} x}$$

I.3.2. On utilise la règle de D'Alembert pour avoir le rayon de convergence $C_{k,n}$ étant non nul :
Pour $x \neq 0$:

$$\left|\frac{C_{k+1,n}x^{2(k+1)+n}}{C_{k,n}x^{2k+n}}\right| = \frac{(k+n+1)x^2}{(k+1)(2k+1+2n)(2k+2+2n)} = \frac{x^2}{2.(k+1)2k+2n+2)}$$

de limite nulle si k tend vers $+\infty$ $R=+\infty$. Et donc toute série entière étant C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence

$$\boxed{\text{Les } \varphi_n \text{ sont de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

I.4.1. On a :

$$\frac{C_{k,n+1}}{C_{k,n}} = \frac{2.(k+n+1)}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)}$$

donc :

$$\boxed{\frac{C_{k,n+1}}{C_{k,n}} = \frac{1}{2k+2n+1}}$$

I.4.2. On a donc $C_{k,n} = (2k+2n+1)\,C_{k,n+1}$

$$\boxed{C_{k,n} - (2n+1)C_{k,n+1} = 2kC_{k,n+1}}$$

I.4.3. Soit $x \neq 0$; On a avec le calcul précédent :

$$\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x}\varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kC_{k,n+1}x^{2k+n}$$

On veut trouver φ_{n+2} donc $C_{k,n+2}x^{2k+n+2}$. On fait un changement d'indice pour avoir x^{2k+n+2} en espérant que le coefficient soit le bon :

$$\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x}\varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} 2(k+1)C_{k+1,n+1}x^{2k+n+2}$$

On peut supprimer $k = -1$ car le terme est nul , et

$$\begin{aligned} 2(k+1)C_{k+1,n+1} &= 2\,(k+1)\,.\frac{2^{n+1}\,((k+1)+(n+1))!}{(k+1)!\,(2\,(k+1)+2(n+1))!} \\ &= \frac{2^{n+2}(k+(n+2))!}{k!\,\big(2k+2(n+2)\big)!} = C_{k,n+2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x}\varphi_{n+1}(x) = \varphi_{n+2}(x).}$$

I.4.4. Ici :

$$\boxed{u_n = C_{0,n} = 2^n\frac{n!}{(2n)!}.}$$

Il n'est pas inutile de vérifier :

$$u_n.\alpha_p = 2^n\frac{n!}{(2n)!}.\frac{(2n)!(n+p)!}{p!.n!\,(2n+2p)!} = \frac{2^n\,(n+p)!}{p!\,(2n+2p)!}$$

I.5.1. D'après l'expression ci-dessus :

$$\varphi_n(x) = x^n\sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n}x^{2k}$$

Pour $x \neq 0$, x^n est non nul et tous les termes de la somme sont strictement positifs, d'où :

$$\boxed{\text{Pour } x \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(x) \neq 0}$$

I.5.2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \,]0,1]$; l'expression ci-dessus montre que $\varphi_n(x) > 0$. On peut diviser et utiliser **I.4.3.** que

$$\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} > \frac{2n+1}{x} \geq 1$$

d'où :

$$\boxed{0 < x \leq 1 \Longrightarrow \gamma_n(x) > 1}$$

I.5.3. Pour $x \neq 0$, d'après **I.5.1.**, on peut diviser la relation du **I.4.3.** par $\varphi_{n+1}(x)$ et obtenir :$\gamma_n(x) = \dfrac{2n+1}{x} + \dfrac{\varphi_{n+2}(x)}{\varphi_{n+1}(x)}$

$$\boxed{\gamma_n(x) = \frac{2n+1}{x} + \frac{1}{\gamma_{n+1}(x)}}$$

PARTIE II

décomposition d'un réel en fraction continue

II.1. Par récurrence double :

- $q_0 = 1 \geq 0$
- $q_1 = a_1 \geq 1$ car $a_1 \in \mathbb{N}^*$
- $q_2 = a_2q_1 + q_0 \geq 1.1 + 1 = 2$

- Si on suppose pour $n \geq 3$ $q_{n-1} \geq n-1$ et $q_{n-2} \geq n-2$, alors

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq 1.(n-1) + (n-2) = 2n - 3 \geq n \quad \text{car } n \geq 3$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n \geq n}$$

II.2.1. Par récurrence simple:

- Pour $n = 1$, $p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + 1) - a_1 a_0 = 1$ et,
- Si on suppose pour $n \geq 2$: $p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2} = (-1)^{n-2}$

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2})\, p_{n-1} = -(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}) = (-1)^{n-1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}}$$

II.2.2. Ici, pour $n \geq 2$ et sans récurrence : :

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2})\, p_{n-2} = a_n (p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2})$$

D'après le résultat précédent :

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n}$$

II.3.1. Par réduction au même dénominateur la question précédente donne :

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 1,\ x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \text{ et, pour } n \geq 2,\ x_n - x_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}}$$

II.3.2. $x_n - x_{n-2}$ est donc du signe de $(-1)^n$, la suite (x_{2n}) est croissante (strictement) et la suite (x_{2n+1}) est décroissant (strictement) . De plus d'après la question **1** , $q_{n-1} q_n \geq (n-1).n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x_n - x_{n-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(x_{2n} - x_{2n+1}$ converge donc vers 0.

$$\boxed{\text{Les suites } (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$$

II.3.3. Les suites étant adjacentes et strictement monotones on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{2n} < \alpha < x_{2n+1} \quad \text{d'où} \quad 0 < \alpha - x_{2n} < x_{2n+1} - x_{2n}$$

c'est-à-dire, d'après **II.3.1.**, comme $\alpha = \dfrac{c}{d}$,

$$0 < \frac{c.q_{2n} - d.p_{2n}}{d.q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n}.q_{2n+1}}$$

D'où, en multipliant par dq_{2n} strictement positif :

$$\boxed{k_n = cq_{2n} - dp_{2n} \text{ est entier et vérifie } 0 < k_n < \frac{d}{q_{2n+1}}}$$

et donc $\dfrac{d}{q_{2n+1}} > 1$ pour tout n. Or $q_n \geq n$ on a donc $2n + 1 < d$ pour tout n.C'est absurde pour $n > E\left(\frac{d}{2}\right)$. E conclusion,

$$\boxed{\alpha \text{ n'est pas rationnel}}$$

II.4.1. Le graphe demandé est un morceau de parabole telle que :

- $f(-1) = f(\lambda + 1) = \lambda > 0$
- f atteint son minimum en $\lambda/2$ ce minimum $-\lambda^2/4 - 1$ étant strictement négatif.
- $f(0) = f(\lambda) = -1 < 0$

II.4.2. Sur $[-1, 0]$ la fonction est continue strictement décroissante et $f(-1).f(0) < 0$. Donc par bijection monotone il existe un unique racine sur $]-1, 0[$

De même il existe une unique racine sur $]\lambda, \lambda+1[$. Et comme λ est entier :

$$\boxed{r_1 < 0\ ;\ r_2 > 0\ ;\ E(r_1) = -1\ ;\ E(r_2) = \lambda}$$

II.5.1. Il vient, par définition des suites (p_n) et (q_n) :

i	0	1	2	3
p_i	λ	λ^2+1	$\lambda^3+2\lambda$	$\lambda^4+3\lambda^2+1$
q_i	1	λ	λ^2+1	$\lambda^3+2\lambda$

II.5.2. Les suites (p_{n-1}) et (q_n) vérifient la même relation de récurrence $u_n = \lambda u_{n-1} + u_{n-2}$ et sont égales pour $n = 1, 2, 3$. Pa récurrence double :

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad q_n = p_{n-1} \quad \text{et donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}}$$

II.5.3. La suite (q_n) est définie par la relation de récurrence linéaire double

$$\forall n \geq 2 \quad q_n = \lambda q_{n-1} + q_{n-2}$$

dont l'équation caractéristique n'est autre que $f(x) = 0$. q_n est donc de la forme $A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$, où les scalaires A_1, A sont déterminés par

$$\begin{cases} q_0 = A_1 + A_2 = 1 \\ q_1 = A_1 r_1 + A_2 r_2 = \lambda \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A_1 = \frac{r_2 - \lambda}{r2 - r_1} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\lambda - r_1}{r_2 - r_1}$$

soit$\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n = \dfrac{(\lambda - r_1) r_2^n - (\lambda - r_2) r_1^n}{r_2 - r_1}$.

Le sujet dit "en fonction de r_1, r_2 et n".λ doit donc se simplifier en fonction de r_1 et r_2.Or d'après l'équation λ est l somme des racines $\lambda = r_1 + r_2$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n = \frac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2 - r_1}}$$

II.5.4. En vertu des deux questions précédentes :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{r_2^{n+2} - r_1^{n+2}}{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}}$$

II.5.5. Puisque $|r_1| < 1$ et $r_2 > \lambda \geq 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = r_2}$$

II.5.6. Ici, $q_0 = 1, q_1 = 3$ et : $\forall n \geq 2 \quad q_n = 3q_{n-1} + q_{n-2}$, d'où les valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6
q_n	1	3	10	33	109	360	1189

Comme $\dfrac{1}{q_4 q_5} < 10^{-4}$, et comme d'après **II.3.** $x_4 = \dfrac{q_5}{q_4} < \alpha < x_5 = \dfrac{q_6}{q_5}$ et $x_5 - x_4 = \dfrac{1}{q_4 q_5}$, :

$$\boxed{\frac{360}{109} < \alpha < \frac{1189}{360}}$$

remarque: $\dfrac{360}{109} \approx 3,30275$, $\dfrac{1\,189}{360} \approx 3,30278$ *et* $\alpha = r_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,30278$.

PARTIE III

III.1.1. En appliquant la définition :

$$\boxed{[a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \quad \text{et} \quad [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}}$$

On remarque que $[a_0, a_1] = \dfrac{p_1}{q_1}$, on vérifie rapidement que $[a_0, a_1, a_2] = \dfrac{p_2}{q_2}$

III.1.2. On suppose ici que pour toute suite (a_n) vérifiant les hypothèses. $[a_0,\dots,a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$, $p_{n-1},p_{n-2},q_{n-1},q$ ne dépendant pas de a_n (d'après les relations de récurrences les définissant) ; remplacer a_n par $a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}$ revient à apllque la récurrence à la suite $\left[a_0,\dots,a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]$donne donc:

$$\left[a_0,\dots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]=\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}\left(a_np_{n-1}+p_{n-2}\right)+p_{n-1}}{a_{n+1}\left(a_nq_{n-1}+q_{n-2}\right)+q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}$$

soit, par définition des suites (p_n) et (q_n) :

$$\boxed{\text{Si } [a_0,\dots,a_n]=\frac{p_n}{q_n},\text{ alors }\left[a_0,\dots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}$$

III.1.3. Les deux questions précédentes prouvent par récurrence sur n que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad [a_0,\dots,a_n]=\frac{p_n}{q_n}=x_n}$$

III.1.4. Encore une récurrence

On va prouver par récurrence : "pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $(n\geq 1\Rightarrow a_n>0)$ $[a_0,\dots,a_n]=a_0+\dfrac{1}{[a_1,\dots,a_n]}$ "

- pour $n=1$:

$$[a_0,a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=a_0+\frac{1}{[a_1]}$$

- Soit $n\geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vrai. On considère une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ Grâce à $\mathcal{P}_n$ appliqué à la suite

$$\left(a_0,a_1,a_2,\cdots a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

qui vérifie bien les conditions:

$$[a_0,\dots,a_n,a_{n+1}]=\left[a_0,\dots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]=a_0+\frac{1}{\left[a_1,\dots,a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right]}=a_0+\frac{1}{[a_1,\dots,a_{n+1}]}$$

ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai, ce qui achève la preuve.

- Donc, en particulier pour une suite a de S :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\quad [a_0,\dots,a_n]=a_0+\frac{1}{[a_1,\dots,a_n]}}$$

III.2.1. D'après les suites adjacentes du **II.**, $x_0=a_0<\alpha<x_1=a_0+\dfrac{1}{a_1}$, or $a_1\geq 1$ et $a_0\in\mathbb{Z}$ et donc $a_0\leq\alpha<a_0+1$ e $a_0=E(\alpha)$

$$\boxed{x_0<\alpha<x_1\quad\text{et}\quad a_0=E(\alpha)}$$

III.2.2. D'après les résultats du **III.1:**

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad x_n=[a_0,\dots,a_n]=a_0+\frac{1}{[a_1,\dots,a_n]}$$

d'où, par unicité de la limite : $\alpha=a_0+\dfrac{1}{\alpha_1}$. En appliquant, pour k fixé dans $\mathbb{N}$, ce même résultat à la suite $(a_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est aussi dans S, on a :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\quad \alpha_k=a_k+\frac{1}{\alpha_{k+1}}}$$

III.2.3. Comme au **III.2.1.**on trouve que $a_k=E(\alpha_k)$ pour tout k. Ainsi, à partir de la valeur de α, les suites (a_n) et (α_n) s construisent grâce aux relations suivantes :

$$\boxed{\alpha_0=\alpha\ ,\ a_0=E(\alpha)\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N}\quad \alpha_{k+1}=\frac{1}{\alpha_k-a_k}\ ,\ a_{k+1}=E(\alpha_{k+1})}$$

En maple on aura avec des tableaux: (et les problèmes d'arrondis dans les calculs)

```
alpha[0]:=....;a[0]:=trunc(alpha[0]);

for i from 0 to ...  do alpha[i+1]:=1/(alpha[i]-a[i]);a[i+1]:=trunc(alpha[i+1]); od;
```

Pour α donné on a donc unicité de la suite a telle $\alpha = F(a)$. D'ou l'injectivité de F . comme la surjectivité est admise

$$\boxed{F \text{ est bijective}}$$

III.2.3. On a $a_0 = E\left(\sqrt{3}\right), \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, a_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} = \sqrt{3}+1, a_2 = 2, \alpha_3 = \alpha_1$ Suite pérodique pour $n \geq 1$

$$\boxed{a_0 = 1, \forall p \geq 1, a_{2p-1} = 1, a_{2p} = 2}$$

III.3.1. Reprenant les notations du **I.5.**, avec $x = \dfrac{1}{\mu}$, si on pose

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k = \gamma_k\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

on obtient (d'après les résultats du **I.3.** et du **I.5)** :

$$\alpha_0 = \frac{1}{\mathrm{th}(1/\mu)} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n > 1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = (2n+1)\mu + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

Soit alors la suite $a = \left((2n+1)\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est bien une suite d'entiers non nuls. D'après **II.3.** et **III.1.**, la suite de term général $x_n = [a_0, \ldots, a_n]$ converge vers le nombre irrationnel $\alpha = F(a)$.

et d'après **III.2** $\alpha = \alpha_0$.

$$\boxed{a = \left((2n+1)\mu\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite de S telle que } F(a) = \frac{1}{\mathrm{th}(1/\mu)}}$$

III.3.2.

n	0	1	2	3	4
a_n	1	3	5	7	9
p_n	1	4	21	151	1380
q_n	1	3	16	115	1051

De même qu'au **II.5.6.**, comme $\dfrac{1}{q_3 q_4} < 10^{-4}$, l'encadrement $x_4 < \alpha < x_3$ convient :

$$\boxed{\frac{1\,380}{1\,051} < \frac{1}{th(1)} < \frac{151}{115}}$$

remarque 1 : . Ces trois nombres admettent pour valeur approchée arrondie à 10^{-5} près $1,31304$.

remarque 2 : on vient de montrer que $th(1)$ n'est pas rationnel. Et comme $th(1) = \frac{e^2-1}{e^2+1}$ on a (par l'absurde que e^2 e e ne sont pas rationnels.