Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLÈME

Les parties **I**, **II** et **III** sont totalement indépendantes. La partie **IV** utilise certains résultats des parties **I**, **II** et **III**.

Notations

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ euclidien , muni de sa base orthonormée canonique $i = (1, 0, 0)\,, j = (0, 1, 0)\,, k = (0, 0, 1)$

Pour tout $n \geq 2$ on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On appelle vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ toute matrice à n lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$..

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $< \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} >= xa + by + cz$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

On note ${}^tM$ la transposée de la matrice M.

Partie I

Un exemple numérique

Dans cette partie, on se propose d'étudier le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ & & -y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right.$$

1. Montrer que, si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne que l'on déterminera.

2. Calculer $\det(A)$. *On pourra utiliser la calculatrice.*
La matrice A est-elle inversible ?

3. Déterminer l'inverse A^{-1} de A. *On pourra utiliser la calculatrice.*
4. Montrer que le système $(\mathcal{S})$ n'admet qu'une seule solution Q que l'on déterminera.
5. **a.** Montrer que le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système $X = JX + K$ avec un vecteur colonne K de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera et la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que la matrice J est semblable à la matrice $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice de $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions :

$$J = PDP^{-1}$$

les colonnes de P forment une base orthonormée directe.

c. Vérifier que ${}^tPP = I_3$
d. Pour tout entier naturel p, déterminer J^p en fonction de D et de la matrice P, puis donner les 9 coefficients de J^p (on distinguera selon la parité de p)

On définit la suite de vecteurs colonnes $(X^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ par $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On pose enfin $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$.

6. Calculer les vecteurs colonnes $X^{(1)}$ et $\Delta^{(1)}$.
7. Écrire un programme dans le langage de Maple ou Mathematica qui calcule le vecteur colonne $X^{(2008)}$.
8. **a.** Montrer que pour tout entier naturel p, $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$, puis que $\Delta^{(p)} = PD^p\,{}^tP\Delta^{(0)}$.
b. Soit $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour tout entier naturel p, $\|D^pU\| \leq \dfrac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|U\|$.
c. Exprimer $\|U\|$ en fonction de U et ${}^tU$ puis montrer que $\|PU\| = \|U\|$ et $\|{}^tPU\| = \|U\|$.
d. Déduire des questions précédentes que $\|\Delta^{(p)}\| \leq \sqrt{\dfrac{13}{2^p}}$.
9. Quelle est la limite de la suite $\left(X^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$?
10. Déterminer une valeur p à partir de laquelle le vecteur colonne $X^{(p)}$ est une valeur approchée de la solution exacte Q à 10^{-3} près, c'est-à-dire tel que $\|\Delta^{(p)}\| \leq 10^{-3}$.

Partie II

Un espace de matrices

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère les matrices

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } U(b) = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

On définit l'ensemble $E = \{J(a,b)\,/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

2. Montrer que E est stable par produit matriciel.

3. Déterminer une base de l'image et du noyau de $U(1)$
Montrer que ces deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Soit V un élément de $\mathrm{Im}(U(1))$. calculer $U(1).V$
En déduire une matrice diagonale semblable à $U(1)$.

5. Déterminer un réel λ tel que $U(b) = J(a,b) - \lambda.I_3$.

6. En déduire une matrice diagonale semblable à $J(a,b)$

Partie III

Une norme matricielle

Si $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note pour tout indice i de $[[1,n]]$, $l_i = \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Puis on définit le réel positif $\varphi(M)$ par $\varphi(M) = \max\{l_i, i \in [[1,n]]\}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ alors on définit la norme infinie du vecteur X par $\|X\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in [[1,n]]\}$.

1. a. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Vérifier $\varphi(A) = 6$

b. On reprend le cas général. Montrer que φ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

– **2.** Soit. X est un vecteur colonne

a. On note $X' = MX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Donner l'expression de x'_i en fonction des x_j et des coefficients de la matrice M.

b. Montrer que $|x'_i| \le l_i \|X\|_\infty$.

c. En déduire que $\|MX\|_\infty \le \varphi(M)\|X\|_\infty$ puis déterminer un vecteur colonne X_0 non nulle telle que $\|MX_0\|_\infty = \varphi(M)\|X_0\|_\infty$

Montrer que φ est une norme d'algèbre.

Partie IV

La méthode de Jacobi :

Pour un système linéaire comportant un grand nombre d'équations et d'inconnues, les méthodes de résolution directe (comme celle du pivot de Gauss) aboutissant à une solution exacte deviennent très gourmandes en temps de calcul. Il est alors plus judicieux de calculer une solution approchée à l'aide d'une suite définie par récurrence convergeant vers la solution exacte, comme cela se fait dans la méthode de Jacobi que nous allons nous contenter d'illustrer ici : .

On considère le système linéaire de Cramer d'inconnue X.

$$(\mathcal{S}) : AX = B$$

avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice du système , $B = (b_i)$ le vecteur colonne du second membre.On note $Q = (q_j)$ l'unique solution du système

On suppose en outre que A vérifie la condition supplémentaire $\forall i \in [[1, n]]$,$a_{i,i} \neq 0$.(termes diagonaux tous non nuls)

1. Montrer que tout système de Cramer $A_0X = B_0$ (c'est à dire un système ne vérifiant pas la condition sur les termes diagonaux) est équivalent à un système du type précédent.

2. Montrer que le système $(\mathcal{S})$ est équivalent a un système

$$X = JX + K$$

où J est une matrice carrée ayant tous ses termes diagonaux nuls et K un vecteur colonne.

On définit ainsi la suite de vecteurs $\left(X^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par la donnée d'un vecteur initial $X^{(0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On définit aussi la suite $\left(\Delta^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ par $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$. Le vecteur $\Delta^{(p)}$ permet d'apprécier l'erreur d'approximation entre la solution approchée et la solution exacte Q.

3. Montrer que pour tout entier naturel p, $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$

4. Montrer que pour tout entier naturel p, $\left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty \leq (\varphi(J))^p \left\|\Delta^{(0)}\right\|_\infty$.

5. En déduire une condition suffisante (C_1) sur la matrice J pour que la suite $\left(\left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. Lorsque la condition (C_1) est vérifiée, montrer que la suite $\left(X^{(p)}\right)$ converge vers Q .

7. La condition (C_1) est-elle vérifiée par la matrice J de la partie **I** ?

8. On revient au cas général. On suppose dans cette question que la matrice J est diagonalisable : il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J = PDP^{-1}$.

a. Montrer que $\left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty \leq \varphi(P)\,(\varphi(D))^p\,\varphi(P^{-1})\left\|\Delta^{(0)}\right\|_\infty$.

b. En déduire une condition suffisante (C_2) sur $\varphi(D)$ pour que la suite $\left(\left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

c. La condition (C_2) est-elle vérifiée par la matrice D de la partie **I** ?

9. Dans cette question, on reprend l'exemple de la matrice $J(0,b)$ avec $b \neq 0$ définie à la partie **II**. On a vu qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J(0,b) = PDP^{-1}$.

– Calculer $\varphi(J(0,b))$ et $\varphi(D)$.

Fin de l'énoncé