EPIITA 2006
Math 2 Partie 1 et 2

1.

a) f est bien continue sur $\mathbb{R}^*$ et comme $e^t - 1 \sim_0 t$

$$\boxed{\lim\left(f(x)\right)_{x->0} = i}$$

b) La fonction $x- > \dfrac{\exp(ix^2)-1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle est intégrable sur $]0,1]$ puisque prolongeable par continuité en 0 . elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque $\left|\dfrac{\exp(ix)^2-1}{x^2}\right| \leq \dfrac{2}{x^2}$ et que $2 > 1$.

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

c) On pose $u = e^{it^2} - 1$ et $v = -\dfrac{1}{t}$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\int_\varepsilon^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}dt = -\frac{\exp(ix^2)-1}{x} + \frac{\exp(i\varepsilon^2)-1}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^x 2it\exp(it^2)\frac{1}{t}dt$$

Si ε tend vers 0 , la première intégrale admet une limite (intégrabilité de f) , la seconde aussi (prolongement par continuité en 0 de $\exp(ix^2)$) , et $\lim\limits_{\varepsilon->0}\left(\dfrac{\exp(i\varepsilon^2)-1}{\varepsilon}\right)$ d'après l'équivalent du $a)$.

On peut donc passer à la limite :

$$\boxed{\int_0^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}dt = -\frac{\exp(ix^2)-1}{x} + 2i\int_0^x \exp(it^2)dt}$$

d) On a donc

$$\int_0^x \exp(it^2)dt = \frac{1}{2i}\int_0^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}dt$$

et comme le membre de droite admet une limite en $+\infty$, celui de gauche en a une aussi.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(it^2)dt \text{ converge}}$$

Ce qui ne prouve pas l'intégrabilité de la fonction sur $\mathbb{R}^+$;

2.

a) On a

$$\left|t^2 - i\right| = \sqrt{t^4+1}$$

et

$$\left|\exp\left(-x^2t^2 + ix^2\right)\right| = e^{-x^2t^2} \leq 1$$

et donc

$$\boxed{\left|\frac{\exp\left(-x^2t^2+ix^2\right)}{t^2-i}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}}$$

La fonction $t- > \dfrac{\exp\left(-x^2t^2+ix^2\right)}{t^2-i}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$, majorée en module par $t- > \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$. Or cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue positive et $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \sim_{\pm\infty} \dfrac{1}{t^2}$

$$\boxed{F(x) \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

b) Soit $\phi(x,t) = \dfrac{\exp\left(-x^2t^2+ix^2\right)}{t^2-i}$. On a :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x- > \phi(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t- > \phi(x,t)$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$

- On a domination par $t->\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendant de x . Et donc

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

c) On a $|\phi(x,t)| = \dfrac{\exp(-x^2t^2)}{\sqrt{1+t^4}} \leq \exp(-x^2t^2)$ et donc comme $t->\exp(-x^2t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (continue et $\lim\limits_{\pm\infty}\left(t^2\exp(-x^2t^2) = 0 \text{ car } x\neq 0\right)$

$$|F(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2t^2)dt$$

Cette dernière intégrale se calcule par changement de variable C^1 bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $t->u=xt$ (car $x>0$)

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2t^2)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2)\frac{du}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{x}$$

$F(x)$ tend donc vers 0 si x tend vers $+\infty$. Comme F est paire , c'est aussi la limite en $-\infty$

$$\boxed{\lim_{\pm\infty}(F)=0}$$

d) .

- $\forall t\in\mathbb{R}$, $x->\phi(x,t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,t) = -2x\exp\left(-x^2(t^2-i)\right)$
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $t->\phi(x,t)$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $t->\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$ (intégrable car $t^2\left|\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right| = 2\,|x|\,t^2\exp(-x^2t^2)$ tend vers 0 si t tend vers $\pm\infty$).
- On a domination de $2\,|x|\,t^2\exp(-x^2t^2)$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ par $2b\exp(-a^2t^2)$ indépendant de x , continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (toujours la limite de $t^2\left(2b\exp(-a^2t^2)\right)$ nulle)
  Tout ceci assure que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^*$ par parité.
  Sur $\mathbb{R}^{+*}$ la dérivée se calcule par dérivation sous le signe somme, le résultat reste vrai sur $\mathbb{R}^{-*}$ par imparité de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)dt$

$$\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)dt}$$

e) On a donc $F'(x) = -2x\exp(ix^2)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2t^2)dt = -2x\exp(ix^2)\frac{\sqrt{\pi}}{x} = -2\sqrt{\pi}\exp\left(ix^2\right)$

On remarque que F est continue en $0, C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que F' admet une limite finie en 0 . donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(0) = -2\sqrt{\pi}e^0$.

On peut donc intégrer la fonction F' sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$) et avoir

$$\boxed{F(x)-F(0) = -2\sqrt{\pi}\int_0^x\exp(it^2)dt}$$

Remarque : On peut aussi ne pas prolonger F' par continuité , mais alors intégrer F' sur $[\varepsilon,x]$ puis faire tendre ε vers 0;

Or $\lim\limits_{+\infty}(F) = 0$ et donc en passant à la limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(it^2)dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}F(0) = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{E = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, C=S=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$$

$F(0)$ n'est pas si "facile" à calculer (si c'était si facile le calcul serait demander) . Il faut décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$, pour chaque élément simple prendre la partie réelle (la primitive donne un ln) et la partie imaginaire (la primitive donne un arctan) et passer à la limite (les ln se regroupent pour donner 0 et il reste la limite à l'infini des arctan)