Concours communs polytechniques
Epreuve spécifique filière PSI- Session 2004
Mathématiques I : 4 heures

Calculatrices autorisées.

Notations et but du problème

E_0 est le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0)=0$.

E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur R_+^*.

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(f'(t)\right)^2$ soit intégrable sur R_+.

On note :

$$N_1(f) = \left[\int_{R_+^*}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_1 \text{ ; } N_2(f) = \left[\int_{R_+}\left(f'(t)\right)^2 dt\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_2 \text{ ;}$$

Le but du problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.
Les parties I et II sont consacrées à deux exemples, la partie III aborde le problème de comparaison de façon plus générale.

Partie I – Exemple I

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = Arc\tan t$.

1. Montrer que f appartient à E_1.
2. Montrer que, pour tout $x \in R_+^*$, la fonction $H_x : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'en particulier f appartient à E_2.
3. Calcul de $N_2(f)$. Pour $x \in R_+^*$, on note $\varphi(x) = \int_{R_+} H_x(t)\,dt$.
   3.1. Montrer que la fonction φ est continue sur R_+^*.
   3.2. Soit $x \in R_+^*$, $x \neq 1$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de la variable T, $\frac{1}{(T+1)(T+x^2)}$.
   3.3. En déduire l'expression explicite de $\varphi(x)$ pour $x \in R_+^*$, $x \neq 1$.
   3.4. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

4. Etudier le signe de $u - Arc\tan u$ pour $u \in R_+$.

5. Montrer que, pour $x \in R_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{Arc\tan(xt)}{t(t^2+1)}$ est intégrable sur R_+^*.

6. Calcul de $N_1(f)$. Pour $x \in R_+$ on pose $\theta(x) = \int_{R_+^*} G_x(t)\,dt$.

   6.1. Montrer que la fonction θ est continue sur R_+.

   6.2. Montrer que la fonction θ est de classe c^1 sur R_+.

   6.3. Expliciter $\theta'(x)$ pour $x \in R_+$.

   6.4. Expliciter $\theta(x)$ pour $x \in R_+$.

   6.5. Etablir une relation entre $\left[N_1(f)\right]^2$ et $\theta(1)$.

   6.6. En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur R_+ par $f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.

1. Calculer $f'(t)$ pour $t \in R_+$. En déduire que f est élément de E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?
2. Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \to 0^+$ (respectivement lorsque $t \to +\infty$).
3. Montrer que f appartient à E_1.
4. **Calcul d'une intégrale**.

   4.1. Montrer que la fonction $t \to \dfrac{-\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

   On note désormais $J = \int_{]0,1[} \dfrac{-\ln t}{1-t^2}\,dt$.

   4.2. Montrer que, pour tout $k \in N$, la fonction $t \mapsto -t^{2k}\ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \int_{]0,1[} \left(-t^{2k}\ln t\right) dt$.

   4.3. Justifier avec soin l'égalité $J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} \left(-t^{2k}\ln t\right) dt$.

   4.4. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J, sachant que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

5. **Calcul de $N_1(f)$.**

   Pour simplifier on note $I = \left[N_1(f)\right]^2 = \int_{R_+^*} \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2 dt$.

On rappelle que $shu=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$, $chu=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$ pour $u\in R$, et la relation $ch^2u-sh^2u=1$.

5.1. Montrer que $I=2\int_{R_+^*}\frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}dt$.

5.2. Justifier le changement de variable $u=f(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ dans l'intégrale obtenue dans la question II.5.1 ; que devient I quand on effectue ce changement ?
Même question pour le changement de variable $v=e^u$.

5.3. En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part les ensembles E_1 et E_2, d'autre part les fonctions N_1 et N_2.

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe c¹ et telle que $f(0)=0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur R_+^* par $g(t)=\frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t)=\frac{f(t)}{t}$ pour tout $t>0$. On pose $\alpha=f'(0)$.

   1.1. Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t\to 0^+$?

   1.2. Exprimer $f'(t)-\sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t\in R_+^*$.

   1.3. Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t)\times g'(t)$) lorsque $t\to 0^+$?
   (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha=f'(0)$).

   1.4. Etablir, pour $x>0$, la relation :
   $$(R)\ :\ \int_{]0,x]}\left(f'(t)\right)^2dt=\frac{1}{2}\left(g(x)\right)^2+\int_{]0,x]}\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2dt+\frac{1}{4}\int_{]0,x]}\left(h(t)\right)^2dt$$
   (après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0,x]$ de chacune des fonctions qui interviennent)

2. **Comparaison de E_1 et E_2.**

   2.1. Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2\subset E_1$.

   2.2. Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t\mapsto \sin t$)

3. **Comparaison de N_1 et N_2.**

   3.1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du R-espace vectoriel E_0.
   On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.

3.2. Justifier l'inégalité $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.

3.3. Pour $n \in N^*$, on définit sur R_+ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t}\sin(nt)$.

Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in N^*$ et calculer $N_2(f_n)$.

3.4. Les normes N_1 et N_2 sont- elles équivalentes sur E_2 ?

4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; quelle et cette limite ?

Fin de l'énoncé