E.P.I.T.A. 2006

Epreuve de mathématiques 2 (option : 2 heures)

Dans ce problème, on se propose de calculer les intégrales de Fresnel (1788-1827) :

$$C = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, d\,t \qquad ; \qquad S = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, d\,t.$$

Par commodité, on considérera aussi l'intégrale $E = C + i\,S$ définie par :

$$E = C + i\,S = \int_0^{+\infty} \exp(i\,t^2)\, d\,t.$$

On rappelle enfin la valeur de l'intégrale suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\, d\,t = \sqrt{\pi}$.

1°) Existence de l'intégrale de Fresnel

a) On considère l'application continue définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(x) = \frac{\exp(i\,x^2) - 1}{x^2}.$$

Etablir que f se prolonge par continuité en 0 par une valeur qu'on précisera.

b) Justifier l'existence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(i\,t^2) - 1}{t^2}\, d\,t.$$

c) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer un nombre complexe λ tel qu'on ait :

$$\forall\, x > 0, \quad \int_0^x \frac{\exp(i\,t^2) - 1}{t^2}\, d\,t = \frac{1 - \exp(i\,x^2)}{x} + \lambda \int_0^x \exp(i\,t^2)\, d\,t\ .$$

d) En déduire l'existence de l'intégrale E, donc des intégrales C et S.

2°) Calcul de l'intégrale de Fresnel à l'aide d'une fonction auxiliaire

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\exp(-x^2(t^2 - i))}{t^2 - i} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}.$$

En déduire que la fonction suivante est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2(t^2 - i))}{t^2 - i}\, d\,t.$$

b) Etablir que F est continue sur $\mathbb{R}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

c) Etablir l'inégalité suivante pour tout $x > 0$, et en déduire les limites de F en $\pm\infty$:

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2\, t^2)\, d\,t = \frac{\sqrt{\pi}}{x}.$$

d) On considère un segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$ $(0 < a < b < +\infty)$.

Etablir que F est de classe C^1 sur $[a, b]$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser une expression de $F'(x)$.

e) En déduire une expression de $F'(x)$ sans symbole $\int$, puis prouver que :

$$\forall\, x > 0, \quad F(0) - F(x) = 2\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(i\, t^2)\, d\, t.$$

Déterminer alors la valeur des trois intégrales de Fresnel E, C, S en admettant que $F(0)$, qui est l'intégrale d'une fonction rationnelle facile à calculer, est égale à :

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i}\, d\, t = \frac{(1+i)\,\pi}{\sqrt{2}}.$$