D'après :Centrale 2006 -PSI , première épreuve

sujet légérement modifié

Partie I.

A.1. (F_0) est une équation linéaire d'ordre deux, à coefficients constants et homogène. Son équation caractéristique est $r^2+1=0$ et admet $\pm i$ comme solutions. L'ensemble des solutions réelles de (F_0) est donc l'ensemble des fonctions du type :

$$\boxed{y = A\cos + B\sin,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

A.2. On cherche une solution particulière et on obtient l'ensemble des solutions en ajoutant cette solution particulière à l'ensemble des solution de l'équation homogène.

- vu le second membre on cherche une solution particulière de $y" + y = e^{ix}$, dont on prend la partie réelle
- une solution particulière de $y''(x) + y(x) = e^{ix}$ est de la forme $x \mapsto axe^{ix}$ (car i est racine de l'équation caractéristique). En reportant on trouve $a = -i/2$
- donc $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{2}$ est une solution particulière
- . L'ensemble cherché est donc l'ensemble des fonctions du type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{x\sin(x)}{2} + A\cos(x) + B\sin(x)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

A.3. Sur $[0,2\pi]$ h est défini par

$$\forall x \in [0,2\pi],\ h(x) = \max(0,\sin(x)) = \frac{\sin(x) + |\sin(x)|}{2}$$

ce qui se généralise à $\mathbb{R}^+$ par 2πpériodicité.

$$\boxed{h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})}$$

- On vérifie que $g"(x) + g(x) = f"(x+2\pi) + f(x+2\pi) - (f"(x) + f(x)) = h(x+2\pi) - h(x) = 0$ car h est 2π périodique.
- g est donc solution de l'équation homogène et il existe donc deux scalaires a et b tels que $g(x) = acos(x) + bsin(x)$
- Sur $[0,\pi]$ f_p est la solution de $y" + y = \sin(x)$ vérifiant $f_p(0) = f_p'(0) = 0$.En prenant la partie imaginaire de $\dfrac{-ixe^{ix}}{2}$ on a $f_p(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) - \dfrac{x}{2}\cos(x)$

  les conditions initiales donnent $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$ $f_p(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{2}$, et on a donc $f_p(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$, $f_p'(\pi) = 0$
- Sur $[\pi,2\pi]$ f_p est la solution de $y" + y = 0$ vérifiant $f_p(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$, $f_p'(\pi) = 0$.On a donc $f_p(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$

  les conditions initiales donnent : $f_p(x) = -\dfrac{\pi}{2}\cos(x)$
- On a alors $a = g(0) = f_p(2\pi) - f_p(0) = -\dfrac{\pi}{2}$, $b = g'(0) = f_p'(2\pi) - f_p'(0) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} f_p = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{2} \text{ si } x \in [0,\pi] \\ -\dfrac{\pi}{2}\cos(x) \text{ si } x \in [\pi,2\pi] \end{array} \right. \\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_p(x+2\pi) = f_p(x) - \dfrac{\pi}{2}\cos(x) \end{array}}$$

B. La solution f de (F_0) telle que $f(0) = a$ et $f'(0) = b$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ :\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$$

en posant $\cos(\phi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\phi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ si $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$, pour tout ϕ si si $\sqrt{a^2+b^2} = 0$

$$\boxed{\|f\|_\infty \leq \|(a,b)\|}$$

C. on peut vérifier que f_0 est solution du problème posé :

Soit f_0 la fonction proposée. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_0(t) = \sin(t) \int_0^t h(u)\cos(u)\,du - \cos(t)\int_0^t h(u)\sin(u)\,du$$

Sous cette forme, on voit que f_0 est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (car la primitive d'une fonction continue est C^1) et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_0'(t) = \cos(t) \int_0^t h(u)\cos(u)\,du + \sin(t)\int_0^t h(u)\sin(u)\,du$$

f_0' est à son tour C^1 et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_0''(t) = -\sin(t) \int_0^t h(u)\cos(u)\,du + \sin(t)\int_0^t h(u)\sin(u)\,du + (\cos^2(t)+\sin^2(t))h(t)$$

et on a donc bien

$$f_0'' + f_0 = h$$

L'ensemble des solutions de (F_h) est donc l'ensemble des fonctions du type

$$\forall t \in \mathbb{R}^+\ ,\ f(t) = \int_0^t h(u)\sin(t-u)du + A\cos(t) + B\sin(t)\ ,\ (A,B) \in\in \mathbb{R}^2$$

on peut aussi calculer f_0 par variation des constantes

D. Le calcul précédent donne que $f_0(0) = f_0'(0) = 0$ et f_0 est donc la solution cherchée. On a

$$\forall t \geq 0,\ |f_0(t)| \leq \int_{[0,t]} |h(u)||\sin(t-u)|\,du \leq \int_{[0,t]} |h(u)|\,du \leq \|h\|_1$$

f_0 est donc bornée et, en passant à la borne supérieure,

$$\boxed{\|f_0\|_\infty \leq \|h\|_1}$$

Si $\|h\|_1 \leq \varepsilon$ alors $\|f_0\|_\infty \leq \varepsilon$ et (F_h) est donc stable par rapport au second membre au sens 1.

E. Les solutions sont (en utilisant $A.2$ pour trouver la solution particulière) les fonctions

$$\forall t \in \mathbb{R}^+\ ,\ y(t) = \frac{\delta t\sin(t)}{2} + A\cos(t) + B\sin(t), (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

En particulier si $t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y(\pi/2 + 2k\pi) = b + \delta(\pi/2 + 2k\pi) \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$$

Les solutions ne sont donc pas bornées sur $\mathbb{R}^+$

Pour tout $\eta > 0$, il existe donc une fonction $h = \eta\cos$ telle que $\|h\|_\infty \leq \eta$ telle que la solution de l'équation différentielle nulle et à dérivée nulle en 0 ne soit pas bornée.

$$\boxed{\text{in n'y a pas stabilité par rapport au second membre}}$$

En divisant par t et en prenant toujours $t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, on obtient une suite telle que $\dfrac{y(t_k)}{t_k}$ converge vers $\dfrac{\delta}{2}$ non nul. Donc $y(t)$ n'est pas négligeable devant t en $+\infty$

Partie II.

- Pour tout $\alpha > 1$, la fonction $t -> g(\alpha, t) = \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $t^\alpha g(\alpha,t)$ admet une limite finie (1) si t tend vers $+\infty$ avec $\alpha > 1$ Donc la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

  Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

  - $\forall \alpha > 1,\ t \mapsto g(\alpha, t)$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- on a domination sur tout segment $[a,b] \subset]1,+\infty[$

$$\forall \alpha \in [a,b]\,,\ \forall t \geq 0, \left|\frac{1}{1+t^{\alpha}}\right| \leq g(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+t^{a}} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

$g(t)$ étant continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $a > 1$).

et donc :

$$\boxed{\alpha \mapsto I(\alpha) \text{ est définie et continue sur }]1,+\infty[}$$

B.1. la fonction $\dfrac{g'}{g}$ étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ y admet des primitives C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Soit A l'une d'entre elle. On a donc $A' = \dfrac{g'}{g}$

On a $(ge^{-A})' = g'e^{-A} - gA'e^{-A} = 0$. La dérivée est nulle sur un intervalle donc la fonction ge^{-A} est constante sur $\mathbb{R}^+$.

B.2. Le sujet note B et C les parties réelle et imaginaire de A .D'après la question précédente ge^{-A} est une fonction constante que l'on note $\alpha e^{i\beta}$ en prenant le module et un argument de cette constante. . On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = \alpha e^{B(t)} e^{i(\beta + C(t))}$$

d'où l'existence des fonctions $r(t) = \alpha e^{B(t)}$ et $\theta(t) = \beta + C(t)$.

Comme $\alpha \geq 0$ r est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et comme g est non nul , r ne prend pas la valeur 0 .

Comme g est C^k , $\dfrac{g'}{g}$ est C^{k-1} . la primitive A est donc C^k et donc aussi ses parties réelles et imaginaires. Enfin α et β étant des constantes:

$$\exists r \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}), \exists \theta \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\ ,\ g = re^{i\theta}$$

C.1. La fonction $g = f + if'$ est définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

Or g ne prend pas la valeur 0 : $\forall t \in \mathbb{R}^+\ g(t) \neq 0$. On le montre par l'absurde : Si g s'annule en un point t_0 alors $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. Or le théorème de Cauchy-Lipschitz (utilisable ici car les coefficients de l'équation sont continus) s'applique : il existe une une unique solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant des conditions initiales données. La fonction nulle est cette solution évidente donc $f = \widetilde{0}$, ce qui est exclus par le sujet.
g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}^*$. Les fonctions r et θ de la question précédente vérifient alors

$$f(t) + if'(t) = r(t)\cos(\theta(t)) + ir(t)\sin(\theta(t))$$

et, en identifiant parties réelle et imaginaire,

$$\boxed{\exists r \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}), \exists \theta \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\ ,\ f = r\cos(\theta)\ \ et\ f' = r\sin(\theta)}$$

On a bien sûr $r = \sqrt{f^2 + (f')^2}$.

C.2. En dérivant $f' = r\sin(\theta)$, on obtient une expression de $f'' = r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta)$que l'on reporte dans l'équation initiale :

$$r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) = qr\sin(\theta) - r\cos(\theta)$$

Par ailleurs, en dérivant $f = r\cos(\theta)$, on obtient $f' = r'\cos\theta + r\theta'\sin\theta$ et donc :

$$-r\theta'\sin(\theta) + r'\cos(\theta) = r\sin(\theta)$$

C.3. On élimine r' en multipliant la première relation par $\cos(\theta)$ et la seconde par $\sin(\theta)$ et en faisant la différence ; il reste :

$$r\theta' = qr\cos(\theta)\sin(\theta) - r$$

Comme r est une fonction qui ne s'annule pas, on peut diviser par r pour obtenir

$$\boxed{\theta' = q\cos(\theta)\sin(\theta) - 1}$$

- On élimine maintenant r à gauche en multipliant la première relation par $\sin(\theta)$ et la seconde par $\cos(\theta)$ et en faisant la somme. il reste

$$\boxed{r' = qr\sin(\theta)^2}$$

C.4.

- on a $\left(re^{-Q}\right)' = \left(r' - rQ'\right)e^{-Q} = qr(\sin(\theta)^2 - 1)$. Or q et r sont strictement positifs donc la dérivées est négative et re^{-Q} est décroissante. et donc
$$\forall t \geq 0,\ r(t)e^{-Q(t)} \leq r(0)$$
- Comme Q est croissante ($Q' = q \geq 0$), et admet pour limite $I(\alpha)$ en l'infini, on a donc
$$\forall t \geq 0,\ r(t) \leq r(0)e^{I(\alpha)}$$
r étant croissante (car $r' = qr\sin(\theta)^2$ est positive) et majorée, r admet une limite en l'infini (théorème de limite monotone) telle que :
$$\lim_{+\infty} r \leq r(0)e^{I(\alpha)}$$
- D'après les variation de r on a : $\|r\|_\infty \leq r(0)e^{I(\alpha)}$.
Or $r(0) = \sqrt{f(0)^2 + f'(0)^2} = \|(f(0), f'(0))\|$ et donc $\|r\|_\infty \leq \|(f(0), f'(0))\|e^{I(\alpha)}$
Enfin pour un complexe la partie réelle et la partie imaginaire sont majorée (en valeur absolue) par le module:
$$\boxed{\begin{array}{c}\|f\|_\infty \leq \|(f(0), f'(0))\|e^{I(\alpha)} \\ \|f'\|_\infty \leq r\|(f(0), f'(0))\|e^{I(\alpha)}\end{array}}$$

C.5. $q\sin(\theta)\cos(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $|q\sin(\theta)\cos(\theta)|$ est majorée par q qui est intégrable. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$

- On a
$$\theta(t) + t = \theta(0) + \int_0^t (\theta'(u) + 1)du = \theta(0) + \int_0^t q(u)\sin(\theta(u))\cos(\theta(u))du$$
Comme la fonction est intégrable, on a une limite réelle en $+\infty$ pour $\theta(t) + t$.
$$\lim_{t->+\infty} (\theta(t) + t) = \int_0^{+\infty} q(u)\sin(\theta(u))\cos(\theta(u))du$$

C.6. Notons L la limite réelle en l'infini de r et l celle de $\theta(t) + t$. On a alors, au voisinage de l'infini $\theta(t) = -t + l + o(1)$
$$f(t) = r(t)\cos(\theta(t)) = (L + o(1))\cos(-t + l + o(1)) = L\cos(t - b + o(1)) + o(1)$$
$$f(t) = L\cos(t - l)\cos(o(1)) - L\sin(t - l)\sin(o(1)) + o(1)$$
Comme cos et : sin sont bornées on obtient avec les limites en du sin et ducos : :
$$f(t) - L\cos(t - l) = L\cos(t - l)\left(\cos(o(1)) - 1\right) - L\sin(t - l)\sin(o(1)) + o(1)$$
et ainsi en posant $a = L, b = -l$:
$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} (f(t) - a\cos(t + b)) = 0}$$

C.7. Le graphe de $t \mapsto a\cos(t + b)$ (sinusoïde) est une courbe asymptote du graphe de f , quand t tend vers $+\infty$.

Partie III.

A. Soit $\varepsilon > 0$. Si on pose $\eta = \varepsilon e^{-I(\alpha)}$ alors la question $II.C.4$ montre que si f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et si $\|(f(0), f'(0))\| \leq \eta$ alors f est bornée et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

B.1. Un calcul classique donne
$$w' = f_1 f_2'' - f_2 f_1''$$
Comme $f_i'' = qf_i' - f_i$, on en déduit que
$$w' = qw$$
On a donc $w = w(0)e^Q$. Comme Q est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a $\forall x \geq 0,\ Q(x) \in [Q(0) \lim_{+\infty} Q[= [0, I(\alpha)[$. Comme exp croît sur $\mathbb{R}$, on a donc
$$\forall x \geq 0,\ |w(0)| \leq |w(x)| \leq |w(0)|e^{I(\alpha)}$$
Les solutions f_1 et f_2 étant indépendantes, le Wronskien ne s'annule pas et $w(0) \neq 0$.

B.2. C'est la méthode de variations des constantes : On cherche une solution quelconque $f(x) = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x)$ avec $f_1(x)C_1'(x) + f_2(x)C_2'(x) = 0$. En dérivant deux fois et en reportant dans l'équation on arrive au système :

$$\begin{cases} f_1(x)C_1'(x) + f_2(x)C_2'(x) = 0 \\ f_1'(x)C_1'(x) + f_2'(x)C_2'(x) = h(h) \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, le déterminant su système est le Wronskien $w(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)$, non nul car on a un système fondamental de solutions. Le système est de Cramer.

$$C_1'(x) = -\frac{h(x)C_2(x)}{w(x)} \ , \ C_2'(x) = \frac{h(x)C_1(x)}{w}$$

Soient C_1 et C_2 sont donc des primitives de $\dfrac{hf_2}{w}$ et $\dfrac{hf_1}{w}$.

$$\boxed{f = -C_1f_1 + C_2f_2, \text{ avec } C_1 \text{ primitive de } \frac{hf_2}{w} \text{ et } C_2 \text{ primitive de } \frac{hf_1}{w}}$$

B.3. On a le système :

$$\begin{array}{c} f(0) = -C_1(0)f_1(0) + C_2(0)f_2(0) \\ f'(0) = -C_1(0)f_1'(0) + C_2(0)f_2'(0) \end{array}$$

$(C_1(0), C_2(0))$ est solution d'un système linéaire dont le déterminant vaut $w(0) \neq 0$. Dans le cas où $f(0) = f'(0) = 0$, l'unique solution est $C_1(0) = C_2(0) = 0$.

B.4. Soit $h \in L^1$ et f la solution de $(E_{\alpha,h})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On a alors $f = -C_1f_1 + C_2f_2$ avec C_1 et C_2 qui sont les primitives nulles en 0 de $\dfrac{hf_2}{w}$ et $\dfrac{hf_1}{w}$. Ainsi

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = \int_0^x \frac{h(t)}{w(t)}(f_1(t)f_2(x))dt - \int_0^x \frac{h(t)}{w(t)}(f_2(t)f_1(x))\ dt$$

D'après la partie II, f_1 et f_2 sont bornées. D'après $III.B.1$, $|w(x)| \geq a > 0$. On a donc

$$\forall x \geq 0,\ |f(x)| \leq \frac{2\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty}{a} \int_0^x |h(t)|\ dt \leq C\|h\|_1 \ \text{ avec } \boxed{C = \frac{2\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty}{a}}$$

On a ainsi $\|f\|_\infty \leq C\|h\|_1$.
On en déduit la stabilité de $(E_{\alpha,0})$ par rapport au second membre au sens 1 :pour un $\varepsilon > 0$ donné, $\eta = \varepsilon/C$ convient

C.1. Un calcul immédiat donne

$$\Phi'' - q\Phi' + \Phi = h \ \text{ avec } h = qg'$$

D'après le calcul du $I.A.2$, il existe des constantes a et b telles que

$$\forall t,\ g(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \frac{\lambda t \sin(t)}{2}$$

On en déduit que $g'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t) + \dfrac{\lambda}{2}(\sin(t) + t\cos(t))$ et donc

$$|g'(t)| \leq \frac{|\lambda|}{2}t + \left(|a| + |b| + \frac{|\lambda|}{2}\right) \sim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{|\lambda|}{2}t$$

. Comme $\alpha > 1$, on a alors

$$|h(t)| = |q(t)|\,|g'(t)| \leq \frac{1}{1+t^\alpha}\left[\frac{|\lambda|}{2}t + \left(|a| + |b| + \frac{|\lambda|}{2}\right)\right] \sim \frac{|\lambda|}{2}t^{1-\alpha} \longrightarrow_{t\to+\infty} 0$$

C.2. On veut montrer que $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |h| = 0$.

pour cela on revient aux quantificateurs : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A,\ |h(t)| \leq \varepsilon$. On a alors (on découpe l'intégrale)

$$\forall t \geq A,\ \frac{1}{t}\int_0^t |h| \leq \frac{1}{t}\int_0^A |h| + \frac{t-A}{t}\varepsilon \leq \frac{1}{t}\int_0^A |h| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

dès que $\frac{1}{t}\int_0^A |h| \leq \varepsilon$ donc $t \geq \frac{\int_0^A |h|}{\varepsilon}$

On a ainsi montré que pour $t \geq A' = \max\left\{A, \frac{\int_0^A |h|}{\varepsilon}\right\}$ on a $\frac{1}{t}\int_0^t |h| \leq 2\varepsilon$. On a donc :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |h| = 0}$$

ce qui correspond à la négligeabilité demandée.

C.3. On a vu en question $III.B.4$ que

$$\forall t \geq 0,\ |\Phi(t)| \leq C\int_0^t |h| \ \text{ avec } \ C = \frac{2\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty}{a}$$

Le majorant étant négligeable devant t au voisinage de l'infini, il en est de même pour Φ.

C.4. D'après la question $I.E$, la fonction g n'est pas négligeable devant t au voisinage de l'infini.: pour $t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ on a $\lim\left(\frac{g(t_k)}{t_k}\right)) = \frac{\lambda}{2}$.Comme $\Phi = f - g$ est négligeable devant t $\lim\left(\frac{\Phi(t_k)}{t_k}\right) = 0$ et donc $\lim\left(\frac{f(t_k)}{t_k}\right)) = \frac{\lambda}{2}, \neq 0$. On conclut alors comme en $I.E$ que f n'est pas borné et donc à la non stabilité de $(E_{\alpha,0})$ par rapport au second membre au sens ∞.

D.1. Notons $q_\alpha(t) = \frac{1}{1+t^u}$. On a $f'' - q_\alpha f' + f = 0$ et $g'' - q_\beta g' + g = 0$. En faisant la différence de ces deux relations, on obtient

$$\Phi'' - q_\alpha \Phi' + \Phi = \ h = (q_\alpha - q_\beta)g'$$

D.2. D'après la question $II.C.4$, $\|g'\|_\infty \leq \|(a,b)\| \exp(I(\beta))$. . On a donc

$$\int_0^{+\infty} |h| \leq \|(a,b)\| \exp(I(\beta)) \int_0^\infty |q_\alpha - q_\beta| = \|(a,b)\| \exp(I(\beta)) \left(\int_0^1 |q_\alpha - q_\beta| + \int_1^\infty |q_\alpha - q_\beta|\right)$$

Mais $q_\alpha - q_\beta$ est de signe constant sur $[0,1]$ comme sur $[1,+\infty]$ on a donc $\int_0^1 |q_\alpha - q_\beta| = \left|\int_0^1 (q_\alpha - q_\beta)\right|$ et $\int_1^{+\infty} |q_\alpha - q_\beta| = \left|\int_1^{+\infty} (q_\alpha - q_\beta)\right|$

Avec les notations de l'énoncé, on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} |h| \leq \|(a,b)\| \exp(I(\beta)) \Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|\Big)$$

D.3. De la question $III.B.4$., on déduit que

$$\|\Phi\|_\infty = \|f - g\|_\infty \leq C\|h\|_1 \leq C\ \|(a,b)\|\ e^{I(\beta)} \Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|\Big).$$

Si on fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in [1,\infty[$, on étudie la fonction F :

$$\forall \beta :\ F(\beta) = \|(a,b)\|\ e^{I(\beta)} \Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|\Big)$$

F est continue sur $[1,\infty[$ et $F(\alpha) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$\forall \beta \in [1,\infty[\ ,\ |\alpha - \beta| \leq \eta \Longrightarrow |F(\beta)| \leq \varepsilon \Longrightarrow \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$$

L'équation $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV.

A. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de telles fonctions et on a

$$\forall t \geq 0,\ f(t) = \sqrt{t+1}g(t),\ f'(t) = \sqrt{t+1}g'(t) + \frac{g(t)}{2\sqrt{t+1}},\ f''(t) = \sqrt{t+1}g''(t) + \frac{g'(t)}{\sqrt{t+1}} - \frac{g(t)}{4(t+1)^{3/2}}$$

on reporte dans $(E_{1,0})$ et en divisant par $\sqrt{t+1}$ on obtient

$$\forall t \geq 0,\ g''(t) + \left(1 - \frac{3}{4(t+1)^2}\right) g(t) = 0$$

B. Si $g(t) = g'(t) = 0$ alors les formules précédentes donnent $f(t) = f'(t) = 0$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz, ceci donnerait f nulle ce qui est exclus. Ainsi, la fonction $t \mapsto g(t) + ig'(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Elle est de classe $\mathcal{C}^2$. On peut appliquer la question $II.B$. On obtient des fonctions $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ et $\beta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que

$$g = \rho \cos(\beta) \quad \text{et} \quad g' = \rho \sin(\beta)$$

C. On procède comme en$II.C$ pour obtenir:

$$\forall t \geq 0,\ \beta'(t) + 1 = \frac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2}$$

On en déduit que

$$\forall x \geq 0,\ \beta(x) + x = \beta(0) + \int_0^x \frac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $t^{3/2}\dfrac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.la fonction est intégrable.

$$\lim_{x\to+\infty} (\beta(x) + x) = \beta(0) + \int_0^{+\infty} \frac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2} dt$$

D. On obtient de même

$$\forall t \geq 0,\ \rho'(t) = \frac{3\cos(\beta(t))\sin(\beta(t))}{4(1+t^2)}\rho(t)$$

On en déduit, en posant

$$U(x) = \int_0^x \frac{3\cos(\beta(t))\sin(\beta(t))}{4(1+t^2)} dt$$

que

$$\forall x \geq 0,\ \rho(x) = \rho(0)e^{U(x)}$$

Or $t \to \dfrac{3\cos(\beta(t))\sin(\beta(t))}{4(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et $t^{3/2}\dfrac{3\cos(\beta(t))\sin(\beta(t))}{4(1+t^2)}$ à une limite nulle en $+\infty$).

$$\lim_{+\infty} (\rho(x)) = \rho(0)e^{\int_0^{+\infty} \frac{3\cos(\beta(t))\sin(\beta(t))}{4(1+t^2)} dt} == a \neq 0$$

E. Comme en II.C.6 on a donc l'existence d'une constante b telle que

$$\lim_{t\to+\infty} (g(t) - a\cos(t+b)) = 0$$

On a donc

$$\frac{f(t)}{\sqrt{t+1}} = a\cos(t+b) + o(1)$$

Comme $\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t+1} - \sqrt{t}}$ tend vers 0 en $+\infty$ on a :

$$\frac{f(t)}{\sqrt{t}} = a\cos(t+b) + o(1)$$

et donc

$$\boxed{f(t) = a\sqrt{t}\cos(t+b) + o(\sqrt{t})}$$

F. Au voisinage de l'infini, $a\sqrt{t}\cos(t+b)$ est un équivalent de $f(t)$ et on a donc l'allure du graphe de f est celui du graphe de $t->a\sqrt{t}\cos(t+b)$. Il oscille entre les branches d'une parabole d'axe horizontal.

Partie V.

A. Les solutions non nulles de $(E_{1,0})$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}^+$ leur équivalent en $+\infty$ ne l'étant pas . (question $IV.E$).

Il n'y a donc pas stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport aux conditions initiales.

Soit $(a, b) \neq (0, 0)$. La solution f de $(E_{\alpha,0})$ telle que $f(0) = a$ et $f'(0) = b$ est bornée pour tout $\alpha > 1$. La solution F de $(E_{1,0})$ telle que $F(0) = a$ et $F'(0) = b$ ne l'est pas. La différence est donc non bornée.

il n'y a pas stabilité par rapport au paramètre de $(E_{1,0})$.

B. On a

$$\forall x \geq 0,\ f_\lambda''(x) - \frac{f_\lambda'(x)}{1+x} + f_\lambda(x) = \lambda \frac{2\cos(x) - \sin(x) + x\cos(x)}{1+x} = \lambda\left(\frac{2\cos(x) - \sin(x)}{1+x} + \frac{x}{1+x}\cos(x)\right)$$

Soit h_λ la fonction ci-dessus. $h_\lambda \in B$ et $\|h_\lambda\|_\infty \leq . \dfrac{2+1}{1} + 1.1 = 4$. Cependant, f_λ est solution de (E_{1,h_λ}), est nulle à dérivée nulle en 0 et n'est pas bornée.

Il n'y a donc pas stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞.