E3A PC 2007 Math B
Exercice 2

1.a) $D_t \cap \Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} y = tx \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{array}\right\}$. on reporte $y = tx$ on obtient : :

$$x^3(1+t^3) - 3tx^2 = 0$$

qui admet pour solutions : $x = 0$ (double) et si $t \neq -1$, $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$.

Donc $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } t \neq -1, D_t \cap \Gamma = \{O, \varphi(t)\} \\ \text{si } t = -1, D_t \cap \Gamma = \{O\} \end{array} \right.$ en notant $\varphi(t) = (\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3})$, le point introduit à la question qui suit.

1.b)

Si $(x,y) \in \Gamma$

- si $x \neq 0$ et $y \neq -x$, on peut poser $t = \dfrac{y}{x}$, alors $(x,y) \in D_t \cap \Gamma$ et donc d'après **1.a)** $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ et $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ donc $(x,y) \in \Phi$
- si $y = -x \neq 0$ soit $t = -1$: $(x,-x) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 = 0$. exclus
- si $x = 0$ alors $(0,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = 0$, C'est le point de Φ obtenu pour $t = 0$

  Réciproquement si $(x,y) \in \Phi$, $\exists t \neq -1$: $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ et $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ et

$$x^3 + y^3 - 3xy = \left(\frac{3t}{1+t^3}\right)^3 + \left(\frac{3t^2}{1+t^3}\right)^3 - 3\frac{3t}{1+t^3}\frac{3t^2}{1+t^3} = \cdots = 0$$

Alors

$$\boxed{\Gamma = \Phi}$$

.

1.c) φ est une application de classe C^∞ de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \alpha'(t) = \dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \beta'(t) = \dfrac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$.

t	$-\infty$			-1		.	0	.	$\sqrt[3]{1/2}$	.	$\sqrt[3]{2}$	.	$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$\|$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$		$\|$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Pour $t \neq -1$ on a $\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)} = t$

On a donc $\lim\limits_{-1} \left(\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right) = -1$ puis $\beta(t) + \alpha(t) = \dfrac{t+t^2}{1+t^3} = \dfrac{t}{t^2-t+1}$ de limite -1 d'où une asymptote d'équation $y = -x - 1$.

1.d)

1.e)

$$\begin{aligned} F(r\cos\theta, r\sin\theta) &= 0 \Longleftrightarrow r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - 3r^2\cos\theta\sin\theta = 0 \\ &\Longleftrightarrow r = 0 \text{ ou } r\ .(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

.

si $r \neq 0$ et $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$.

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

Le point $r = 0$ est sur la courbe Γ et sur le graphe de la courbe en polaire pour $\theta = 0$

Si $\theta = -Pi/4$ $y = -x$. le seul point de Γ est O déjà étudié.

$$\boxed{\text{une équation polaire de } \Gamma \text{ est : } r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}, \theta \not\equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]}$$

.

1.f) Une réponse évidente est $u = id_{\mathbb{R}^2}$,

On peut remarquer que $F(x,y) = F(y,x)$. Donc Γ est invariant par la symétrie orthogonal par rapport à $y = x$.
Le graphe laisse penser qu'il n'y en a pas d'autres.
2.a) Γ est la section de la surface S par le plan $z = 0$

2.b) La droite passe par l'origine donc $p(v) = \langle v, e\rangle\, e$ où $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire directeur de la droite

$$p(M) = \begin{pmatrix}\dfrac{x+y}{2}\\ \dfrac{x+y}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

et donc : $\boxed{d(M,\Delta) = ||\overrightarrow{Mp(M)}|| = \dfrac{|y-x|}{\sqrt{2}}}$.

2.c) N et M ont la même projection orthogonale sur la droite Δ, donc N appartient au plan passant par $p(M)$ et normal à e, d'où :

$$X + Y = x + y$$

et $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{ON}\right\|$, soit $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2$.

On cherche donc (X, Y, Z) tels que $\exists\,(x,y,z) \begin{cases} X + Y = x + y \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases}$

On utilise alors $(x+y)^3 = (x^3 + y^3) + 3xy(x+y)$ donc

$$x^3 + y^3 - 3xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y+1)$$

On a aussi $(x+y)^2 = (x^2+y^2) + 2xy$ donc

$$xy = \frac{(X+Y)^2 - (X^2+Y^2+Z^2)}{2} = \frac{2XY - Z^2}{2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M &\in \Gamma \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (X+Y)^3 - \frac{3}{2}\left(2XY - Z^2\right)(X+Y+1) = 0 \end{aligned}$$

On obtient alors l'équivalence :

$$\boxed{N \in \Longleftrightarrow (X+Y)^3 = \frac{3}{2}(2XY - Z^2)(1 + X + Y)}$$

.

2.d) . S a pour équation $x^3 + y^3 - 3xy - z = 0$, .

Un vecteur normal à la surface est donc $\begin{pmatrix} 3(x_0^2 - y_0) \\ 3(y_0^2 - x_0) \\ -1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$

Donc le plan tangent à S au point M_0 a pour équation :

$$\boxed{3(x - x_0)(x_0^2 - y_0) + 3(y - y_0)(y_0^2 - x_0) - (z - z_0) = 0}$$

.

Le plan tangent est horizontal au point M_0 lorsque $\begin{cases} x_0^2 - y_0 = 0 \\ y_0^2 - x_0 = 0 \end{cases}$ i.e.$\begin{cases} y_0 = x_0^2 \\ x_0 = x_0^4 \end{cases}$, qui admet deux solutions :.

$$\boxed{\text{le plan tangent est horizontal en 2 points : } (0,0,0) \text{ et } (1,1,-1)}$$

.

exercice 3

1.a) g est une intégrale à paramètre . On utilise le théorème de Leibniz de dérivation d'une intégrale à paramètre:

- $\forall t \in [0, \pi/2]$, $x-> \exp(x\sin(t))$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sin(t)e^{x\sin(t)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto \exp(x\sin(t))$ et $t \mapsto \sin(t)\exp(x\sin(t))$ sont continues, donc intégrables sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- On a domination de la dérivée partielle sur tout segment :$\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \forall t \in [0, \pi/2]$, $|\sin(t)e^{x\sin(t)}| \leqslant e^b$ continue donc intégrable sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:
- On a vérifié les hypothèses de domination :

$$\boxed{g \text{ est alors de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)e^{x\sin(t)}dt}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant 0$ et $e^{x\sin(t)} \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)e^{x\sin(t)}dt \geqslant 0$, d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geqslant 0}$. **1.b)** La fonction sin est concave, sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,donc le graphe est sous la tangente en 0 (d'équation $y = x$), et au-dessus de la corde passant par les points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ (d'équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$), et donc : $\boxed{\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], t \geqslant sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}}$.

1.c) pour $x \leq 0$

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq x\sin(t) \leqslant x\frac{2t}{\pi} \text{ d'où } 0 \leq e^{x\sin(t)} \leqslant e^{x\frac{2t}{\pi}}$$

et donc en intégrant (bornes dans le bon sens) :

$$0 \leq g(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\frac{2t}{\pi}}dt = \left[\frac{\pi}{2x}e^{x\frac{2t}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2x}(e^x - 1)$$

$$\boxed{\forall x < 0\ ,\ 0 \leq g(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}(e^x - 1)}$$

De même

$$\boxed{\forall x > 0, g(x) \geqslant \frac{\pi}{2x}(e^x - 1)}$$

1.d)

- $\lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{\pi}{2x}(e^x - 1)\right) = 0$, d'où par encadrement $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0^+$.
- $e^x - 1 \sim_{+\infty} e^x$, donc $\lim\limits_{=\infty}\left(\dfrac{\pi}{2x}(e^x - 1)\right) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et
- et$\lim\limits_{=\infty}\left(\dfrac{\pi}{2x^2}(e^x - 1)\right) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$

1.e) d'après ce qui précède, le tableau des variations de est :

x	$-\infty$		∞
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.a) Le développement en série entière de l'exponentielle, (de rayon de convergence $+\infty$) donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n sin(t)^n}{n!}$$

C'est bien une série entière car après la substitution, on a bien des puissances entières de la variable x.
2.b) Par contre si x est réel, fixé, et si t varie , l'expression précédente n'est pas une série entière. il faut justifier l'intégration termes à termes:
Théorème : Si $\sum u_n$ est une séries de fonctions continues qui converge normalement sur un segment, alors la somme est continue sur le segment et on peut intégrer termes à termes.
(comme on est sur un segment l'intégrabilité est automatique).

Ici $\forall\, t \in [0,\pi/2]$, $|\dfrac{x^n sin(t)^n}{n!}| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$ terme général d'une série convergente et indépendante de t , ce qui assure la convergence normale. . De plus $t->\dfrac{x^n sin(t)^n}{n!}$ est continue sur $[0,\pi/2]$.
On a, pour tout réel x :

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n sin(t)^n}{n!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^n sin(t)^n}{n!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt\right)x^n$$

. Donc g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{W_n}{n!}x^n}$$

.

2.c) On reprend la question **1a)** en vérifiant :

- $\forall t\in[0,\pi/2]$, $x->\exp\left(x\sin(t)\right)$ est C^2 sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x\in t\mapsto \dfrac{\partial^2\exp\left(x\sin(t)\right)}{\partial x^2}(x,t)=\sin{}^2(t)e^{x\sin(t)}$ est continue, donc intégrable sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$., dominée par e^b sur $[a,b]\times[0,\pi/2]$
- D'après le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, à l'ordre deux, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et $\underline{\forall x\in\mathbb{R}, g''(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin{}^2(t)e^{x\sin(t)}dt}$.

Alors, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x(g''(x)-g(x))+g'(x) &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin{}^2(t)-1)e^{x\sin(t)}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)e^{x\sin(t)}dt\\ &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^2(t)e^{x\sin(t)}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)e^{x\sin(t)}dt\end{aligned}$$

On intègre par parties le premier terme en posant : $u(t)=e^{x\sin(t)}, v(t)=\cos(t)$, qui sont de classe C^1,d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2(t)e^{x\sin(t)}dt=\left[\cos(t)e^{x\sin(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)e^{x\sin(t)}dt=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)e^{x\sin(t)}dt$$

ce qui donne :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, x(g''(x)-g(x))+g'(x)=1}$$

2.d) On reporte dans l'équation différentielle le développement en série entière de g, g' et g'' :

$$\begin{aligned}x(g''(x)-g(x))+g'(x) &= x\left(\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}n^2a_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}\\ &= a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)^2a_{n+1}-a_{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

On vérifie $a_1=1$ car $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)dt=1$.
On a alors pour $n\geq 1$: $(n+1)^2a_{n+1}-a_{n-1}=0$
Sachant $a_n=\dfrac{W_n}{n!}$ on en déduit :

$$\boxed{\forall n\geq 1:\frac{n+1}{n}W_{n+1}=W_{n-1}}$$

Le résultat se retrouve classiquement par intégration par partie en posant : $u(t) = sin^n(t), v(t) = -\cos(t)$, de classe C^1,

$$W_{n+1} = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-1}(t)dt = n(W_{n-1} - W_{n+1})$$

2.e) Soit R le rayon de convergence de la série recherchée. Si on pose le calcul précédent avec $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$, on retrouve

$$x(g''(x) - g(x)) + g'(x) = \alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^2\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}\right) x^n$$

On a donc :

$$x(g''(x) - g(x)) + g'(x) = \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

On sépare les termes pairs et les termes impairs:

- $\alpha_1 = 1, \alpha_3 = \dfrac{1}{3^2}, \alpha_5 = \dfrac{1}{3^2.5^2}$,

$$\alpha_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)^1\cdots 3^2} = \frac{1}{(\text{produit des impairs})^2} = \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right)^2$$

- Et le rayon de convergence se déduit de la règle de d'Alembert : pour $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{2n+1}x^{2n+1}}{a_{2n-1}x^{2n-1}}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)^2} \text{ de limite nulle}$$

  $R_{impair} = +\infty$

- α_0 est indéterminé , $\alpha_2 = \dfrac{1}{2^2}\alpha_0, \alpha_4 = \dfrac{1}{4^2.2^2}\alpha_0$,

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{(2n)^2(2n-2)^1\cdots 2^2} = \frac{1}{(\text{produit des pairs})^2} = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2$$

  et sans problème $R_{pair} = +\infty$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right)^2 x^{2n+1} + \alpha_0 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 x^{2n}}$$

Pour déterminer g il suffit de déterminer $\alpha_0 = g(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{0.sin(t)}dt = \frac{\pi}{2}$

2.f) Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, (E) est résoluble en y'', donc

- l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace affine de dimension 2.
- Pour tout (x_0, y_0, y_1) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E) telle que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$
  On remarque aussi que l'ensemble des solutions développable en série entière est un espace de dimension 1 . Et donc : **Il existe des solutions sur $]0, +\infty[$ qui ne sont pas la restriction d'une solution développable en série entière.**

3) D'après 1)b),

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], t \geq \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}, d\prime o\grave{u} \forall x < 0, x.t \leqslant x.\sin(t) \leqslant x.\frac{2t}{\pi}$$

Alors en intégrant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{xt}dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin(t)}dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\frac{2t}{\pi}}dt$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{e^{x\frac{\pi}{2}} - 1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}(e^x - 1)}$$

On en déduit que $\lim\limits_{-\infty}(xg(x)) = -1$ et donc $g(x) \sim_{-\infty} \dfrac{-1}{x}$. Par comparaison d'une fonction positive à une fonction de Riemann, on déduit que

$$\boxed{g \text{ n'est pas intégrable sur } \boxed{-\infty, 0]}}$$

.

4.a) $\varphi_x : t \mapsto e^{x\sin(t)}$ est 2π-périodique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc développable en série de Fourier .

4.b) $d_k(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{x\sin(t)-ikt}dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_x(t)e^{-ikt}dt = c_k(\varphi_x)$ le coefficient de Fourier complexe d'indice k.

φ_x est continue par morceaux , 2π-périodique, donc l'égalité de Parseval s'applique : $\boxed{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |\varphi_x(t)|^2 dt = \sum_{k-\infty}^{+\infty} |d_k(x)|^2}$

4.c)

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n sin^n(t)}{n!} e^{-ikt}dt$$

On peut intégrer termes à termes la série précédentes : Séries de fonctions continues qui convergent normalement sur un segment. En effet

$$\left|\frac{x^n sin^n(t)}{n!} e^{-ikt}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \text{ terme général d'une série qui converge vers } e^{|x|}$$

On a donc : :

$$d_k(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\int_0^{2\pi} \sin^n(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!} I_{k,n}$$

4.d) $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{k,n} &= \int_0^{2\pi} \sin^n(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{(2i)^n}\int_0^{2\pi}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p e^{i(n-2p-k)t}dt \\ &= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p\int_0^{2\pi} e^{i(n-2p-k)t}dt \end{aligned}$$

.

Or

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-2p-k)t}dt = \begin{cases} = \left[\dfrac{e^{i(n-2p-k)t}}{n-2p-k}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ si } n \neq 2p+k \\ = \displaystyle\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \text{ si } n \neq 2p+k \end{cases}$$

On sépare les cas:

- Si $n-k$ est impair on est toujours dans le premier cas et $I_{k,n} = 0$
- Si $n-k$ est pair on peut poser $n-k = 2q$. Il faut donc étudier si $p = q$ est possible , c'est à dire si $0 \leq q \leq n = k+2q$ c'est à dire si $q \geq 0$ et $q \geq -k$. On a donc :

$$I_{k,k+2q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \leq \max(0,-k) \\ & \dfrac{1}{(2i)^{2q+k}}\dbinom{2q+k}{q}(-1)^q 2\pi = \dfrac{1}{(2)^{2q+k}}\dfrac{1}{i^k}\dbinom{2q+k}{q} 2\pi \text{ si } q \geq \max(0,-k) \end{cases}$$

$$I_{k,2q+1} = 0$$

Soit en posant $n = 2q+k$ (nouvel indice variable q)

$$\boxed{d_k(x) = \frac{1}{i^k}\sum_{q\geqslant max(0,-k)}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2q+k}\frac{1}{q!(q+k)!}}$$