$\boxed{\textbf{4)}}$ On suppose dans cette question que $\ker(u)$ et $\ker(v)$ sont tous les deux de dimension 1.

a) Quelle est la dimension de $F = \ker(u) + \ker(v)$?

b) Justifier que $\ker(v^2)$ contient $\ker(v)$, et est de dimension 2.

c) Grâce à 3)d), justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. de E dans laquelle la matrice de u soit $\quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{5)}}$ Déterminer dans les deux cas suivants, la valeur du polynôme caractéristique de U, et si U est semblable ou non à l'une des cinq matrices D_0, D_1, D_2, D_3, T.

a) Premier exemple: $\quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Deuxième exemple: $\quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

On considère pour tous réels x et y: $\qquad F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

$\boxed{\textbf{1)}}$ On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique, tel que la base canonique (e_1, e_2) soit orthonormale directe.

Soit: $\qquad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad F(x,y) = 0\}$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $D_t = \{(x, tx), x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer l'intersection: $D_t \cap \Gamma$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$, on note:

$$\alpha(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad \beta(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad \varphi(t) = (\alpha(t), \beta(t)).$$

Comparer Γ avec $\Phi = \{\varphi(t), t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$: on précisera si l'on a une inclusion ou une égalité.

c) Etudier la courbe paramétrée Φ: établir un tableau de variations et préciser l'étude d'éventuelles branches infinies.

d) Donner l'allure de la courbe Γ.

e) Donner une représentation polaire de la courbe Γ.

On notera selon l'usage $u_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$, et on calculera $r(\theta)$ tel que $M(\theta) = r(\theta)u_\theta$ soit sur Γ, pour des valeurs de θ que l'on précisera.

f) Déterminer deux (différentes) transformations orthogonales $u \in O(\mathbb{R}^2)$ telles que $u(\Gamma) = \Gamma$. On justifiera la réponse.

$\boxed{\textbf{2)}}$ On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire canonique, tel que la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ soit orthonormale directe.

On note ici:

$$\Gamma = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / F(x,y) = 0\}, \quad \Delta = \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\},$$
$$\text{et } S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = F(x,y)\}.$$

a) Que représente Γ vis-à- vis de la surface S ?

b) Soit $M = (x, y, 0)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la projection orthogonale de M sur la droite Δ. En déduire la distance euclidienne de M à la droite Δ.

c) Soit $N = (X, Y, Z)$ dans $\mathbb{R}^3$, et toujours $M = (x, y, 0)$. Déterminer à quelles conditions N et M ont la même projection orthogonale sur Δ, et sont à la même distance euclidienne de $O = (0, 0, 0)$.

En déduire une équation cartésienne de la surface Σ décrite alors par ces points N lorsque M décrit Γ (on pourra calculer $(x + y)^3$ et $(x + y)^2$).

d) Déterminer une équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent à S au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = F(x_0, y_0)$.

Dans quels cas, ce plan est-il horizontal (d'équation de la forme $z = c$) ?

EXERCICE 3

Pour tous réels x et t, on note $f(x,t) = e^{x\sin(t)}$.

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin(t)}\,dt$, pour x réel.

1) a) Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et préciser l'expression et le signe de $g'(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a: $\quad t \geq \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$.

c) En déduire une majoration de $g(x)$ pour $x < 0$, et une minoration de $g(x)$ pour $x > 0$.

d) Déterminer: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x), \quad \lim_{x\to+\infty} g(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

e) Préciser les variations de g et donner l'allure de sa représentation graphique.

2) a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixé, préciser le développement en série entière de: $x \mapsto f(x,t)$.

b) En déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$; on précisera bien le théorème utilisé. On écrirera ce développement sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on exprimera a_n au moyen de $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

c) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x\big(g''(x) - g(x)\big) + g'(x) = 1$$

d) En déduire une relation entre W_{n+1} et W_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$, et retrouver cette formule grâce à une intégration par parties.

e) Déterminer toutes les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle:

$$xy'' + y' - xy = 1 \qquad (E).$$

Comment détermine-t-on g parmi toutes ces solutions ?

f) Quels résultats du cours peut-on appliquer concernant l'ensemble des solutions réelles de cette équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{3)}}$ Soit $a < 0$. Grâce à l'encadrement de 1)b), déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_a^0 g(x)\,dx$. g est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_-$?

$\boxed{\textbf{4)}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et $\varphi_x : t \mapsto f(x,t)$.

a) Justifier que φ_x est développable en série de Fourier: on précisera bien les résultats du cours que l'on peut lui appliquer.

b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $d_k(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{x\sin(t)-ikt}\,dt$. Que représente ce nombre complexe ? Ecrire l'égalité de Parseval pour φ_x, en utilisant les nombres $d_k(x)$.

c) Grâce à 2)a, justifier que l'on peut écrire $d_k(x)$ comme somme d'une série.

d) Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer: $\quad I_{k,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^n(t)e^{-ikt}\,dt \quad$ sous forme d'une somme ; pour cela, on développera $(e^{it} - e^{-it})^n$. En déduire une expression de $d_k(x)$.