Étude d'une série trigonométrique

On rappelle que pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\ \mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, pour tout réel t,

$$\mathrm{ch}\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}. \tag{1}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction.

Dans tout le problème, u représente un réel de $]-1, 1[$.

I Deux représentations de S_α

❏ 1 - Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

❏ 2 - Étudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$, de la fonction

$$J\ :\ t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}.$$

Soit $t \geq 0$. On pose,

$$R_N(t,u) = \Big(\frac{u}{e^t - u} - ue^{-t}\sum_{n=0}^{N-1}(ue^{-t})^n\Big)t^{\alpha-1}.$$

❏ 3 - Simplifier l'expression de R_N, en l'écrivant sous forme d'une fraction.

❏ 4 - Prouver que pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\ \mathrm{d}t = 0.$$

❏ 5 - Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{e^t - u}\, \mathrm{d}t = K(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}, \ \text{ pour tout } u \in]-1{,}1[. \tag{2}$$

❏ 6 - On admet que l'identité (2) reste vraie aussi pour $u = e^{ix}$ où $x \in]0{,}2\pi[$. En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'identité suivante :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\, \mathrm{d}t.$$

❏ 7 - Montrer, pour tout $M > 0$, pour tout $u \in]-1, 1[$, l'égalité suivante :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

❏ 8 - Établir, pour tout $u \in]-1, 1[$, l'identité

$$\lim_{M \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

❏ 9 - Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $S_\alpha(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques et de G_α où

$$G_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \text{ pour } u \in]-1, 1[$$

avec

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

II Comportement asymptotique

Soit $B :]0{,}+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^{+\infty} |B(s)|\, \mathrm{d}s < +\infty. \tag{4}$$

$$B(s) = a s^{\lambda-1}(1 + o(1)),\ s \to 0^+,\ a > 0,\ \lambda \in]0, +\infty[. \tag{5}$$

❏ 10 - Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\Big| \int_0^{\delta} (B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}) \, \mathrm{d}s \Big| < \varepsilon \, \frac{a}{n^{\lambda}} \, \Gamma(\lambda).$$

❏ 11 - Prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$ (que vous exprimerez sous la forme d'une intégrale indépendante de n) telle que pour tout $n > 1$

$$\Big| \int_{\delta}^{+\infty} (B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}) \, \mathrm{d}s \Big| \leq Ce^{-(n-1)\delta}.$$

❏ 12 - Prouver que, sous ces hypothèses,

$$\int_0^{+\infty} B(s)e^{-ns} \, \mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}}(1 + o(1)), \text{ quand } n \to +\infty.$$

❏ 13 - Montrer que pour tout entier n, on peut écrire

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} \, e^{-ns} \, \mathrm{d}s,$$

où a_n est défini dans (3).

On pose dorénavant, pour tout $s > 0$,

$$B(s) = \frac{\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}}.$$

❏ 14 - Donner un équivalent de la fonction B au voisinage de 0^+.

❏ 15 - Déterminer la limite de $a_n n^{\alpha/2}$ quand n tend vers l'infini.

Fin du problème