Partie IV - Une récurrence explosive

Dans cette partie, a, b, c, d sont quatre réels tous différents de 0, tels que $|a| \neq |d|$ et que $\dfrac{bc}{ad}$ ne soit pas le carré d'un nombre entier. On considère deux termes initiaux u_0, v_0 **réels** et non simultanément nuls et les deux suites réelles u et v définies par la nouvelle relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = a\,n\,u_n + b\,v_n \\ v_{n+1} = c\,u_n + d\,n\,v_n \end{array}\right. \tag{11}$$

IV.A - On pose $\omega(n) = u_n^2 + v_n^2$.

IV.A.1) Établir l'encadrement : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ -u^2 - v^2 \leqslant 2uv \leqslant u^2 + v^2$.

IV.A.2) Démontrer que, pour tout n, $\omega(n)$ n'est jamais nul. Obtenir, pour $n \geqslant 1$, un encadrement de la forme :

$$\alpha\,(n) \leqslant \frac{\omega(n+1)}{n^2\,\omega(n)} \leqslant \beta\,(n)$$

où les quantités $\alpha\,(n)$ et $\beta\,(n)$ ont des limites finies quand $n \to \infty$.

IV.B - On considère les séries S, T, G, H associées par les formules respectives (8) et (9) aux suites u et v définies par la formule (11).

[redacted]) En utilisant la formule (11), démontrer que $S(z)$ et $T(z)$ ont le même rayon de convergence. Quel est ce rayon de convergence commun (on pourra utiliser la section **A.**) ?

séries $S(z)$ et $T(z)$ sont convergentes pour $|z| < \rho$. Pour un tel z, partir des relations évidentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b\,v_n)\, z^n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n+1} - c\,u_n - d\,v_n)\, z^n = 0$$

et obtenir un système de deux équations ordinaires (non différentielles) vérifiées par $S(z)$ et $T(z)$. Résoudre ce système et exprimer $S(z)$ et $T(z)$ sous la forme :

$$A\,u_0 + B\,v_0$$

où A et B sont deux fractions rationnelles en z (chacune dépendant des coefficients a, b, c, d).

II.C - On appelle séries exponentielles G, H associées aux suites u et v les fonctions de la variable $x \in \mathbb{R}$ qui sont les sommes des séries entières ayant respectivement pour termes généraux $\dfrac{u_n x^n}{n!}$ et $\dfrac{v_n x^n}{n!}$. Autrement dit :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} x^n \tag{9}$$

Montrer que pour $z \in]0, \rho[$ $\quad |u_n| = O\left(\frac{1}{z^n}\right)$

Déterminer les rayons de convergence de ces deux séries.

II.D - Procéder comme précédemment et obtenir (par des transformations justifiées) un système de deux équations différentielles permettant d'exprimer G' et H' en fonction de G et H.

II.E - En déduire que G et H sont solutions de la même équation différentielle linéaire du second ordre (E) dont on exprimera les coefficients en fonction de λ et μ.

On pourra utiliser après l'avoir justifiée :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad d\,G'(x) - b\,H'(x) = \lambda\mu\, G(x)$

II.F - Résoudre les équations différentielles précédentes et obtenir $G(x)$ et $H(x)$ sous une forme simple mettant en évidence la dépendance par rapport aux conditions initiales.

Partie III - Transformation de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace $\mathrm{Lap}(f)$ d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs complexes est définie par :

$$\mathrm{Lap}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-t\,p)\, \mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, on supposera toujours $\alpha \in \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction f est $CDI(\alpha)$, i.e. « continue et dominée à l'infini par $\exp(\alpha t)$ » lorsque :

1. f est une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{C}$.
2. l'application $t \mapsto e^{-\alpha t} f(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

III.A - On suppose que f est $CDI(\alpha)$. Démontrer que pour tout nombre complexe p dont la partie réelle est strictement supérieure à α, $\mathrm{Lap}(f)(p)$ est une intégrale convergente.

III.B - On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que f' est $CDI(\alpha)$.

Démontrer que pour tout nombre complexe p dont la partie réelle est strictement supérieure à α, $\mathrm{Lap}(f')(p)$ est une intégrale convergente et calculer $\mathrm{Lap}(f')(p)$ en fonction de $\mathrm{Lap}(f)(p)$, de p et de $f(0)$.

III.C - Pour une suite (u_n) quelconque de nombres réels, on rappelle que les séries S et G ont été définies respectivement dans les sections **I.D** et **I.F** par les formules :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n \quad \text{et} \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$$

En admettant (pour cette seule question) que l'on puisse permuter série et intégrale et en admettant l'existence des intégrales rencontrées, effectuer les calculs reliant la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto G(t)$; $t \geqslant 0$ avec la série S. On obtiendra un résultat sous la forme :

$$\mathrm{Lap}(G)(p) = \text{expression simple en } S \text{ et } p \tag{10}$$

lorsque p est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positive.

III.D - On souhaite appliquer la formule précédente aux séries S et G associées à la suite récurrente u étudiée dans la Partie **I.** (par les fomules (2) et (4)). Utiliser la linéarité de Lap et les résultats précédents pour transformer l'équation différentielle concernant $t \mapsto G(t)$ en une équation ordinaire concernant S. Vérifier que l'on retrouve l'expression déjà obtenue en **I.E.**

Partie I - Récurrence en dimension 1

Dans cette partie, a, b sont deux réels fixés avec $a \neq 1$. On considère une suite u définie par un terme initial u_0 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = a\, u_n + b \tag{1}$$

I.A - Écrire une séquence d'instructions permettant le calcul de u_n pour n donné (on ne cherchera pas à optimiser les calculs).

I.B - Déterminer la constante k telle que la suite v définie par

$$\forall n : v_n = u_n + k$$

vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = a\, v_n$.

I.C - En déduire la valeur de u_n en fonction de u_0 et de n.

I.D - On appelle série ordinaire associée à la suite u la fonction S de la variable complexe z qui est somme de la série entière de terme général $u_n\, z^n$. Autrement dit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n \tag{2}$$

Déterminer la valeur ρ du rayon de convergence de cette série (une discussion précise des cas particuliers est demandée). Quelle est la valeur minimale ρ_S de ce rayon pour a fixé ?

I.E - On suppose $|z| < \rho_S$. Partir de la relation évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\, u_n - b)\, z^n = 0$$

et obtenir une équation ordinaire (non différentielle) vérifiée par $S(z)$. Résoudre cette équation et exprimer S sous la forme :

$$S(z) = u_0\, A + b\, B \tag{3}$$

où A et B sont deux fractions rationnelles dépendant de z et a.

I.F - On appelle série exponentielle associée à la suite u la série entière de la variable $z \in \mathbb{C}$ définie par :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}\, z^n \tag{4}$$

Déterminer le rayon de convergence ρ_G de cette série G. On pose :

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!}\, z^n \tag{5}$$

Montrer que $G'(z)$ a même rayon de convergence ρ_G que $G(z)$ et que si x est un réel avec $|x| < \rho_G$, $G'(x)$ est effectivement la dérivée de la fonction réelle $x \mapsto G(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\, u_n - b)\, \frac{x^n}{n!} = 0$$

et obtenir (par des transformations justifiées) une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction G. Résoudre cette équation en remarquant que (4) fournit aussi une condition initiale pour $G(x)$. Obtenir G sous la forme

$$G(x) = u_0\, C + b\, D \tag{6}$$

où C et D dépendent de x et a.

I.H - En utilisant (6), retrouver l'expression de u_n en fonction de n.

Écrire une séquence d'instructions utilisant cette expression pour calculer u_n pour chaque valeur donnée de n. Ce programme est-il plus rapide que celui du **I.A** ? Que peut-on faire pour obtenir un programme réellement plus rapide ?

Partie II - Récurrence en dimension 2

Dans cette partie, a, b, c, d sont quatre réels tous différents de 0. On considère deux suites u et v définies par leurs termes initiaux u_0, v_0 et la relation de récurrence matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7}$$

II.B - On revient à la notation en a, b, c, d et, comme à la section **I-D**, on appelle séries ordinaires associées aux suites u et v les fonctions S et T de la variable complexe z qui sont les sommes des séries entières de termes généraux $u_n\, z^n$ et $v_n\, z^n$.

Autrement dit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n,\ T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\, z^n \tag{8}$$

On note λ et μ les deux racines distinctes ou non de $X^2 - (a+d)X + ad - bc = 0$

on note $\rho = \min\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|\mu|}\right)$ et on admet que les deux séries sont convergentes si $|z| < \rho$. {question II.A}

On suppose également $u_0 \neq 0$ ou $v_0 \neq 0$