

N54F



Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**

### Préliminaires

On considère la suite  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^i du.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+2}$ , pour tout entier naturel  $i$ .
2. En déduire que :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \frac{(i-1)(i-3)\dots 1}{i(i-2)\dots 2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Dans tout le problème,  $I$  désigne l'intervalle  $] -1, 1 [$ .

On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = f(x) \quad (\mathcal{E}_f)$$

où  $f$  désigne une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  ; on rappelle qu'une solution  $\varphi$  de cette équation est une fonction dérivable sur  $I$  telle que :  $\forall x \in I, (1-x^2)\varphi'(x) - x\varphi(x) = f(x)$ .

## partie I

1. Soit  $y_0 \in \mathbb{R}$  ; justifier qu'il existe une et une seule solution  $\varphi$  de  $(\mathcal{E}_f)$ , définie sur  $I$ , et telle que  $\varphi(0) = y_0$  ? On énoncera avec précision le théorème utilisé.
2. Montrer que toutes les solutions de  $(\mathcal{E}_f)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .
3. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$(1 - x^2) y' - x y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

- (b) Etant donné un réel  $y_0$ , démontrer que l'unique solution  $\varphi$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  telle que  $\varphi(0) = y_0$  peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + y_0 \right).$$

- (c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$(1 - x^2) y' - x y = 1 \quad (\mathcal{E}_1),$$

déterminer les solutions sur  $I$ .

## partie II

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{R}_m[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$ . On rappelle que c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $m+1$ .

Dans la suite du problème, on assimilera un polynôme  $P$  et sa fonction polynôme  $x \mapsto P(x)$ .

Pour tout polynôme  $P$ , on note  $P'$  son polynôme dérivé. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(P)(x) = (1 - x^2)P'(x) - xP(x).$$

1. Soit  $P \in \mathbb{R}_m[X]$ . Démontrer que  $\Delta(P)$  est un polynôme dont on exprimera le degré en fonction de celui de  $P$ .
2. Démontrer que  $P \mapsto \Delta(P)$  induit une application linéaire de  $\mathbb{R}_m[X]$  dans  $\mathbb{R}_{m+1}[X]$ .  
On note  $\Delta_m$  cette application linéaire.
3. Démontrer que  $\Delta_m$  est injective.
4. Déterminer le rang de  $\Delta_m$ . Que peut-on en déduire pour l'espace image de  $\Delta_m$  ?
5. Exprimer la matrice  $A_m$  de  $\Delta_m$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}_m[X]$  et  $\mathbb{R}_{m+1}[X]$ .

On cherche dans cette partie pour quelles applications  $f$ , l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  admet une solution polynomiale, c'est-à-dire une solution de la forme  $x \mapsto P(x)$ , où  $P$  désigne un polynôme à coefficients réels.

6. Soit  $f$  une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  ; montrer que si l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  admet sur  $I$  une solution polynomiale  $x \mapsto P(x)$ ,  $f$  est nécessairement une fonction polynomiale que l'on exprimera en fonction de  $\Delta(P)$ .

7. Soit  $Q$  un polynôme à coefficients réels et de degré  $n$  non nul. On pose  $Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k$ . On note  $V$  le vecteur colonne de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de coordonnées  $q_0, q_1, \dots, q_n$ . On a ainsi :

$$V = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

(a) Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . On pose  $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ . Soit  $U$  le vecteur colonne de  $\mathbb{R}^n$  de coordonnées  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ . Démontrer que la fonction  $x \mapsto P(x)$  est solution de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_Q)$  si et seulement si on a l'égalité  $A_{n-1}U = V$ .

(b) En déduire que les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :

- i. L'équation différentielle  $(\mathcal{E}_Q)$  admet une solution polynomiale,
- ii.  $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , tel que  $Q = \Delta_{n-1}(P)$ ,
- iii. le système linéaire  $A_{n-1}S = V$  admet une solution  $S$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

(c) On suppose dans cette question que  $n = 4$  ;

- i. Ecrire précisément le système  $A_3S = V$ .
- ii. Montrer que ce système admet une solution si et seulement si les coefficients du polynôme  $Q$  vérifient l'égalité :  $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$ .
- iii. En supposant cette condition satisfaite, résoudre ce système et en déduire l'expression de la solution polynomiale  $P$  de  $(\mathcal{E}_Q)$ , en fonction de  $q_0, q_1, q_3$  et  $q_4$  ( $q_2$  étant exclu).
- iv. Que représente la relation  $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$  pour l'image de  $\Delta_3$  ?

(d) On revient au cas où  $n$  est un entier naturel non nul quelconque. On introduit sur  $\mathbb{R}_n[X]$  une application  $\lambda_n$  définie par :

$$\forall R \in \mathbb{R}_n[X], \quad \lambda_n(R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\sin(u)) du.$$

- i. Démontrer que  $\lambda_n$  est une forme linéaire non nulle.
- ii. Démontrer que, pour tout  $P$  dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on a :  $\lambda_n(\Delta_n(P)) = 0$ .
- iii. En déduire que l'image de  $\Delta_n$  et le noyau de  $\lambda_n$  sont égaux.
- iv. Expliciter une équation de l'image de  $\Delta_n$  (on utilisera la suite  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  étudiée dans les préliminaires).

(e) Déterminer en fonction de  $q_0, \dots, q_n$  une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(\mathcal{E}_Q)$  admette une solution polynomiale.

(f) Retrouver le résultat de la question 7(c)ii.

### partie III

On considère maintenant que  $f$  est définie par une série entière de rayon de convergence  $R > 1$  :

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

1. (a) Montrer que les solutions de  $(\mathcal{E}_f)$  sur  $] -1, 1[$  sont développables en série entière, avec un rayon de convergence au moins égal à 1. (On pourra utiliser le résultat de I3(b).)

- (b) Soit  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  l'une de ces solutions ;
- Exprimer, pour  $k \geq 1$ ,  $a_{k+1}$  en fonction de  $a_{k-1}$  et  $b_k$ .
  - En déduire, pour  $k \geq 1$ , une relation vérifiée par  $\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$ ,  $\frac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}}$  et  $\frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$  (on utilisera la question 1. des préliminaires).
  - En déduire, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2p}$  sous forme de sommes dépendant de  $a_0$ , des  $\alpha_{2k}$  et des  $b_{2k-1}$ , avec  $1 \leq k \leq p$ .
  - De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour  $k \geq 1$ , une relation vérifiée par  $(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$ ,  $(2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)}$  et  $b_{2k}\alpha_{2k}$ .
  - En déduire, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2p+1}$  sous forme de sommes dépendant des  $\alpha_{2k}$  et des  $b_{2k}$ , avec  $1 \leq k \leq p$ .

2. Dans tout ce qui suit,  $\varphi$  désigne la fonction définie, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- Justifier l'existence de  $\varphi(x)$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
- Montrer que  $\varphi$  est une solution de  $(\mathcal{E}_f)$  sur  $]-1, 1[$ .
- On veut démontrer que  $\varphi(x)$  admet  $-f(1)$  pour limite lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.
  - Soit  $x \in ]-1, 1[$  et soit  $\theta \in ]0, \pi[$  tel que  $x = \cos(\theta)$ . Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u)) du.$$

- Soit  $F$  la fonction définie par :

$$\forall \theta \in ]-\pi, \pi[ \quad F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u)) du.$$

Justifier la dérivabilité de  $F$  sur  $]-\pi, \pi[$  et déterminer sa fonction dérivée  $F'$ . On énoncera avec précision le théorème utilisé.

- Conclure.

- On pose maintenant, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- Expliciter  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ .
- Montrer que pour tout  $k \geq 2$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k} \varphi_{k-2}(x).$$

- Soit  $p \in \mathbb{N}$  ; montrer que  $\varphi_{2p+1}$  est une fonction polynomiale de degré  $2p$ .
- Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_{2p}$  de degré  $2p-1$  tel que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \varphi_{2p}(x) = P_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x).$$

- Quelles sont les valeurs de  $k$ , pour lesquelles les fonctions  $\varphi_k$  admettent une limite finie lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures ?

- Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} b_k \varphi_k$  converge simplement vers  $\varphi$  sur  $]-1, 1[$ .