ECRIN 1992

ce concours est un des "E" de "E3A"

partie I : généralités

1.

a) on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = -x(t), y(-t) = -y(t)$. Γ est invariante par symétrie par rapport à O.

b)La courbe est C^∞ sur $\mathbb{R}$

On a $M'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Tous les points sont réguliers. On a $M"(t) = \begin{pmatrix} -2t\sin(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \end{pmatrix}$ et donc

$$\det(M'(t), M"(t)) = 2t$$

Tous les points sont biréguliers sauf $M(0) = O$

c)En $t = 0$, $\det(M'(t), M"(t))$ est nul et change de signe : <u>point d'inflexion</u>

d) Comme tout point est régulier:

- on a une tangente verticale si et seulement si $x'(t) = 0$ soit $\exists k \in \mathbb{N}$, $t = \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi}$
- on a une tangente horizontale si et seulement si $y'(t) = 0$ soit $\exists k \in \mathbb{N}$, $t = \pm\sqrt{k\pi}$

2.

a) On a $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 1$ et donc $s(t) = t$

b) On a $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = M'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}(t) = R_{\pi/2}(\overrightarrow{T}) = \begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$

c) enfin on sait que $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N}$. Ce qui donne $\dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \gamma\overrightarrow{N}$ soit $\begin{pmatrix} -2t\sin(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$ et donc $\gamma = 2t$. Et donc pour $t \neq 0$ $R = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{1}{2t}$

On retrouve que la courbure est nulle uniquement si $t = 0$, et donc que O est le seul point non birégulier.

3.

a) On remarque que $\left|e^{iu^2}\right| = 1$. la fonction $u -> e^{iu^2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. L'intégrale étudiée sera semiconvergente.

On a déja que $u -> e^{iu^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Pour l'étude de la convergence on peut faire le changement de variable $v = u^2$ suivi d'une intégration par partie , ou faire directement une intégration par partie pour augmenter le degré du dénominateur en posant $U = \dfrac{e^{iu^2}}{2i}$ et $V = \dfrac{1}{u}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_1^X e^{iu^2} du &= \int_1^X \frac{1}{u}\left(ue^{iu^2}\right) du = \left[\frac{e^{iu^2}}{2iu}\right]_1^X + \int_1^X \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} du \\ &= \frac{e^{iX^2}}{2iX} - \frac{e^i}{2i} + \int_1^X \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} du \end{aligned}$$

or $\left|\dfrac{e^{iX^2}}{2iX}\right| = \dfrac{1}{2X}$ de limite nulle en $+\infty$ et $\left|\dfrac{e^{iu^2}}{2iu^2}\right| = \dfrac{1}{2u^2}$ ce qui assure l'intégrabilité de $u -> \dfrac{e^{iu^2}}{2iu^2}$ sur $[1, +\infty[$

Par passage à la limite $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge et :

$$\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{ie^i}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} du$$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge, donc aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$ car $u -> e^{iu^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

Si une intégrale à valeurs complexes converge, ses parties réelles et imaginaires convergent aussi et donc

$$\boxed{\lim_{t->+\infty}(M(t)) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(u^2)du \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(u^2)du \end{pmatrix}}$$

Partie II : calcul des intégrales impropres.

1.

a) $t->\displaystyle\int_1^t e^{iu^2}du$ est une primitive de la fonction (continue sur $\mathbb{R}$) $t->e^{it^2}$, la fonction est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t->e^{it^2}$.

f est le carré d'une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t->2e^{it^2}\displaystyle\int_0^t e^{iu^2}du$

b) $t->\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}du$ est une intégrale à paramètre. On vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz:

- $\forall u \in [0,1]$, $t->\dfrac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t->2ite^{it^2(1+u^2)}$
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $u->\dfrac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}$ et $u->2ite^{it^2(1+u^2)}$ sont continue sur le **segment** $[0,1]$ donc y sont intégrables.
- On a domination de la dérivée sur tout segment $[a,b]$: $\forall (u,t) \in [0,1]\times[\eth,]$, $\left|2ite^{it^2(1+u^2)}\right| = 2|t| \leq 2\max(|a|,|b|)$ (indépendant de t et intégrable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment)
- donc $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g'(t) = \displaystyle\int_0^1 2ite^{it^2(1+u^2)}du$

c) pour $t \neq 0$ le changement de variable C^1 bijectif $u = tU$, dans f' donne :

$$f'(t) = 2e^{it^2}\int_0^1 e^{i(tU)^2}tdU = \int_0^1 2te^{it^2(1+U^2)}dU$$

On a donc $\forall t \neq 0$, $g'(t) = if'(t)$. , si $t = 0$ les deux dérivées sont nulles et l'égalité est encore vrai.

On a donc $if - g$ constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \text{ , } if(t) - g(t) = -\pi/4}$$

2. Pour l'étude au voisinage de $+\infty$, on suppose dans cette question $t > 0$.

a) On fait apparaître du t au dénominateur en posant:

$$\frac{u^2e^{it^2u^2}}{1+u^2} = \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\left(ue^{it^2u^2}\right)$$

et comme $\displaystyle\int ue^{it^2u^2}du = \frac{e^{it^2u^2}}{2it^2}$, on intègre par partie en posant $U = \dfrac{u}{1+u^2}$, $V = \dfrac{e^{it^2u^2}}{2it^2}$ fonctions C^1 sur $[0,1]$ (car $t \neq 0$) . comme $U' = \dfrac{(1+u^2)-2u^2}{(1+u^2)^2}$ on a

$$\int_0^1 \frac{u^2e^{it^2u^2}}{1+u^2}du = \frac{e^{it^2}}{4it^2} - \int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\frac{e^{it^2u^2}}{2it^2}du$$

Comme $\left|\dfrac{e^{it^2}}{4it^2}\right| = \dfrac{1}{4t^2}$ on a $\displaystyle\lim_{t->+\infty}\left(\frac{e^{it^2}}{4it^2}\right) = 0$

De plus la majoration (qui est possible car $u->\dfrac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\dfrac{1}{2}$ est continue sur le segment $[0,1]$) :

$$\left|\int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\frac{e^{it^2u^2}}{2it^2}du\right| \leq \frac{1}{t^2}\int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\frac{1}{2}du$$

montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\frac{e^{it^2u^2}}{2it^2}du$ tend vers 0.

$$\lim_{t->+\infty}\left(\int_0^1 \frac{u^2e^{it^2u^2}}{1+u^2}du\right)=0$$

b)Comme $t>0$ le changement de variable C^1 bijectif $U=tu$ donne

$$\int_0^1 e^{it^2u^2}du=\frac{1}{t}\int_0^t e^{iU^2}dU$$

Par convergence de l'intégrale on sait que $\displaystyle\int_0^t e^{iU^2}dU$ admet une limite finie en $+\infty$ et donc

$$\lim_{t->+\infty}\left(\int_0^1 e^{it^2u^2}du\right)=0$$

et donc comme

$$\int_0^1 e^{it^2u^2}du=\int_0^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}du+\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}e^{it^2u^2}du$$

on a aussi :

$$\boxed{\lim_{t->+\infty}\left(\int_0^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}du\right)=0}$$

3. En écrivant

$$g(t)=e^{it^2}\int_0^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}du$$

on trouve que $\displaystyle\lim_{t->+\infty}(g(t))=0$ et donc avec II.1) $\displaystyle\lim_{t->+\infty}(f(t))=i\frac{\pi}{4}$ et donc $(I_1+iI_2)^2=i\dfrac{\pi}{4}$. On a donc

$$\left(I_1^2-I_2^2\right)+2iI_1I_2=i\pi/4$$

On a donc $I_1I_2=+\dfrac{\pi}{8}$ et $|I_1|=|I_2|$ et donc $I_1=I_2=\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{8}}$ (car ce sont des réels)

4. Pour $n\geq 0$ on peut faire dans l'intégrale le changement de variable $t=u^2$ C^1 bijectif

$$u_n=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin\left(u^2\right)du=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

Si $n=0$ on a une intégrale impropre qui converge par changement de variable C^1 bijectif.Pour éviter de traiter 2 cas j'intègre pour tout n sur $]n\pi,(n+1)\pi]$

- sur $]n\pi,(n+1)\pi]$, $\sin(t)$ est du signe de $(-1)^n$ et $\sqrt{t}$ est positif . Donc $u_n.u_{n+1}<0$
- On a $|u_n|=\left|\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}}\right|=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ car la fonction est de signe constant sur $]n\pi,(n+1)\pi]$.
- On a donc $|u_n|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\frac{dt}{2}$. L'intégrale est constante (intégrale d'une fonction périodique sur une période) et don $\lim(u_n)=0$
- Enfin en posant $t=T+\pi$

$$|u_{n+1}|=\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}|\sin(t)|\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin(T)\frac{dt}{2\sqrt{T+\pi}}\leq|u_n|$$

- La suite (un) est de signe alternée et la suite $(|u_n|)$ décroît vers 0 .

On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées : la série $\sum u_n$ converge et sa somme est du signe du premier terme.

Or $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{\sqrt{(N+1)\pi}} \sin(u^2)du$ converge vers I_2 . On a donc $I_2 > 0$ et donc :

$$\boxed{I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}}$$

Partie III : calcul numérique

1. Les deux fonctions sin et cos sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ , \ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En remplaçant x par u^2 on a :

$$\forall u \in \mathbb{R} \ , \ \cos(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{4n}}{(2n)!} \ , \ \sin(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Les deux expressions obtenues sont encore des séries entières sur $\mathbb{R}$. Leur primitives sont donc aussi développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , x(t) = \int_0^t \cos(u^2)du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{(4n).(2n)!} \ , y(t) = \int_0^t \sin(u^2)du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(4n+2)\,(2n+1)!}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{(4n+1).(2n)!}, v_n = (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(4n+3)\,(2n+1)!}}$$

2. On remarque que les deux suites (u_n) et (v_n) sont de signe alternée , et de limite nulle (car les séries convergent).
De plus si $t^2 \leq 2n$

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= t^4.\frac{4n+1}{4n+5}.\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq (2n)^2 \frac{4n+1}{4n+5}.\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\leq \frac{4n+1}{4n+5}.\frac{2n}{2n+1}.\frac{2n}{2n+2} < 1 \end{aligned}$$

et

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = t^4.\frac{4n+2}{4n+6}.\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 1$$

Les deux séries vérifient donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang $n_0 = E\left(\frac{t^2}{2}\right) + 1$. On a donc :

$$\forall n \geq n_0 \ , \ |x - x_n| \leq |u_{n+1}| \leq |u_n| \ \text{ et } \ |y - y_n| \leq |v_n|$$

et donc si $|u_n| \leq \varepsilon$ et $|v_n| \leq \varepsilon$ on a

$$\boxed{\forall n \geq n_0, (\ |u_n| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n| \leq \varepsilon\ ) \Longrightarrow (\ |x - x_n| \leq \varepsilon \text{ et } |y - y_n| \leq \varepsilon\ )}$$

La suite de la partie demandait un programme en pascal (langage utilisé avant Maple en prépa) et commente les valeurs obtenues.

Pour tracer Γ on remarque que $I_1 = I_2 \simeq 0,627$, et que $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ est le premier point à tangente verticale et $t = \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$ est le troisième.
d'après II.4 la série étant alternée les valeurs de $y\left(\sqrt{n\pi}\right)$ et $y\left(\sqrt{(n+1)\pi}\right)$ encadrent I_2 donc l'ordonnée du point limite $(t- > +\infty)$. Ces points sont les points à tangente horizontale.
Remplacer sin par cos ne change pas l'étude de la série : l'abscisse des points à tangente verticale encadrent aussi l'abscisse du point limite. La branche infinie est une spirale.

partie 4 : Etude d'une propriété métrique

On constate que Γ vérifie la propriété pour $k = 1/2$.
Pour parler du rayon de courbure on supposera la courbe birégulière et pas seulement régulière en tout point $M \neq O$
On a besoin de dériver une fois pour avoir $\overrightarrow{T}$ et de dériver $\overrightarrow{T}$. On supposera donc la courbe C^2.
Avec ces précisions l'abscisse curviligne est un paramétrage admissible . On cherchera x, y en fonction de s en introduisant $\alpha = \left(i, \overrightarrow{T}\right)$

1. On a alors $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \end{pmatrix}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R} = \dfrac{d\alpha}{ds}\dfrac{d\overrightarrow{T}}{da} = \dfrac{d\alpha}{ds}\overrightarrow{N}$ donc $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$

   On a donc l'équation différentielle $\dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{k}{s}$ donc $s^2 = 2k(\alpha - \alpha_0)$. La condition initiale donne en O : $s = 0$ et $\alpha = 0$ et donc $\dfrac{s^2}{2k} = \alpha$ (possible $k \neq 0$)

   Or $\dfrac{dx}{ds} = \cos(\alpha) = \cos\left(\dfrac{s^2}{2k}\right)$ et donc comme $x = 0$ si $s = 0$ on a $x(s) = \displaystyle\int_0^s \cos\left(\dfrac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma$ et de même on a :

   $$\boxed{x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma \ , \ y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma}$$

2. Soit $P_k(s)$ le point de C_k .Le changement de variable C^1 bijectif $u = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2k}}$ donne $P_k(s) = \sqrt{2k}M\left(\dfrac{s}{\sqrt{2k}}\right)$. La courbe C^k se déduit de Γ par homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2k}$.

   Remarque : On retrouve bien $C_{1/2} = \Gamma$

   Complément : si on cherche toutes courbes solutions on aura :

   $$x(s) = \int_{s_0}^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma, y(s) = \int_{s_1}^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma$$

   ce qui donne

   $$x(s) = \int_{s_0}^0 \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma + \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma, y(s) = \int_{s_1}^0 \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma + \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma$$

   On a donc une courbe qui se déduit par translation de la courbe :

   $$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma, y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma$$

   On a alors :

   $$\begin{aligned} x(s) &= \cos(\alpha_0)\int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma - \sin(\alpha_0)\int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma \\ y(s) &= \sin(\alpha_0)\int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma + \cos(\alpha_0)\int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma \end{aligned}$$

   qui est l'image de C_k par rotation.

   Toutes les courbes se déduisent de C_k par rotation et/ou translation.