Mines Pont 2009
Math 1
épreuve commune PC/PSI

Le sujet sous entend régulièrement mais ne dit pas (et ne fait pas montrer) que T est linéaire. Cette propriété se vérifie sans problème.

Partie I : Préliminaires

1) Soit $f \in C^0$:

- f est continue donc Tf est continue
- et par périodicité de f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Tf(x+1) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(\frac{x+2}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(\frac{x}{2}+1)\right) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x+1}{2}) + f(\frac{x}{2})\right) = Tf(x),$$

  donc Tf est 1-périodique.
- Ceci montre :

$$\boxed{\forall f \in C^0,\quad Tf \in C^0}$$

2) remarque par période le sup de f sur $\mathbb{R}$ est le sup sur $[0,1]$ qui existe (fonction continue sur un segment)

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad |Tf(x)| = |\frac{1}{2}\ (f\ (\frac{x}{2}\ ) + f\ (\frac{x+1}{2}\ )\ )| \leqslant \frac{1}{2}\ (|f\ (\frac{x}{2}\ )| + |f\ (\frac{x+1}{2}\ )|\ ) \leqslant \frac{1}{2}\,(\|f\|_{\infty} + \|f\|_{\infty}) = ||f||_\infty$$

  d'où : $\sup(Tf(x), x \in \mathbb{R}) \ \leq \|f\|_{\infty}$ soit $||Tf||_\infty \leqslant ||f||_\infty$
- Donc si $||f||_\infty = 1$ on a $||Tf||_\infty \leq 1$ et donc $\sup_{\ ||f||_\infty=1} ||Tf||_\infty \leqslant 1$.
- Pour prouver l'égalité il suffit de trouver une fonction f vérifiant : $||f||_\infty = 1$ et $||Tf||_\infty = 1$
  La fonction constante égale à 1 convient . $e_0 \in C^0$, $||e_0||_\infty = 1$, et $Te_0 = e_0$, donc $||Te_0||_\infty = 1$.

$$\boxed{\sup_{\ ||f||_\infty=1} ||Tf||_\infty = 1}$$

3) Soit $f \in H^0$. On a donc par changements de variable C^1:

$$\int_0^1 Tf(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\quad (f(\tfrac{t}{2}) + f(\tfrac{t+1}{2}))\,dt = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 f(\frac{t}{2})\,dt + \int_0^1 f(\frac{t+1}{2})\,dt\right) = \frac{1}{2}(\int_0^{1/2} f(u)2\,du + \int_{1/2}^1 f(u)2\,du)$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt = 0$$

donc : $Tf \in H^0$.
On conclut :

$$\boxed{H^0 \text{ est stable par } T}$$

4) Remarque: H_0 est un hyperplan de C^0 ne contenant pas la droite D :les deux sous espaces sont bien supplémentaires.
D'après l'énoncé (et c'est classique), H^0 est un hyperplan (vectoriel) de C^0.
Si $f \in C^0$, on décompose $f = h + de_0$ avec $h \in H^0$ et $d \in \mathbb{R}$ par analyse synthèse:

- Si la décomposition existe $\int_0^1 f = \int_0^1 h + \int_0^1 d = 0 + d$ donc $h = f - \left(\int_0^1 f\right) e_0$
- On vérifie que $h = f - \left(\int_0^1 f\right) e_0$ et $de_0 = \left(\int_0^1 f\right) e_0$ conviennent

$$\boxed{Pf = \left(\int_0^1 f\right) e_0}$$

Partie II : fonctions trigonométriques

5)

- Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Te_k(x) = \frac{1}{2}(e_k(\frac{x}{2}) + e_k(\frac{x+1}{2})) = \frac{1}{2}(\,e^{\,2i\pi k\frac{x}{2}} + e^{\,2i\pi k\frac{x+1}{2}}\,) = \frac{1}{2}\,e^{\,i\pi kx}\,\left(1 + (-1)^k\right)$$

$$\boxed{Te_k = \begin{cases} e_{k/2} \text{ si } k \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall k \in \{-n, ..., n\}$, $Te_k \in E_n$ et comme $(e_{-n}, ..., e_n)$ engendre E_n, on déduit : $T(E_n) \subset E_n$: E_n est stable par T.
- Par définition de P on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $Pe_n \in D = \text{Vect}(e_0)$. Comme e_0 est un des éléments de la base de E_n.on a $P(E_n) \subset E_n$: E_n est stable par P.

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ , } E_n \text{ est stable par } T \text{ et } P}$$

6)Les $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques. La famille $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ est une base de E_2.
D'après la question précédente on a : $Te_0 = e_0, Te_1 = 0, Te_{-1} = 0, Te_2 = e_1, Te_{-2} = e_{-1}$.
et donc

$$Mat(T_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.
La matrice est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux : 1 (d'ordre 1), 0 (d'ordre 4).

On a donc $Sp(T_2) = \{0, 1\}$ et T_2 est donc diagonalisable si et seulement si $X(X-1)$ est un polynôme annulateur.
Or

$$Mat(T_2^2 - T_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{T_2 \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

7) Pour montrer que $T_n^p = P_n$ il suffit de vérifier que l'image d'une base par les deux applications est la même:

- pour e_0 : 0 est pair donc $T_n(e_0) = e_{0/2} = e_0$ et $P_n(e_0) = \left(\int_0^1 e_0\right) e_0 = e_0$
- pour e_k avec $k \neq 0$ on a $\int_0^1 e_k = \left[\frac{e^{2ik\pi x}}{2ik\pi}\right]_0^1 = 0$ donc $P_n(e_k) = 0$
- pour e_k avec k impair : $T_n(e_k) = 0$ et donc $T_n^p(e_k) = 0$ et $P_n(e_k) = T_n(e_k)$
- pour $k = 2l$ avec l impair : $T_n(e_k) = e_{k/2} = e_l$ et donc $T^2(e_k) = 0$ donc $T^p(e_k) = 0$ si $p \geq 2$
- plus généralement tout entier $k \neq 0$ se décompose sous la forme $k = \pm 2^a q$ avec q impair et :
  - $T_n(e_k) = e_{k/2}, T_n^2(e_k) = e_{k/4}, \cdots T_n^a(e_k) = e_{\pm q}$ et donc $T_n^{a+1}(e_k) = 0$
  - Or $n < 2^k$ donc $2^a q < 2^k$ et comme $q \geq 1$ on a $2^a < 2^k$ donc $a < k$ et donc (entiers) $a \leq k-1$. Pour $p \geq k$ on a $p \geq a+1$
  - donc $T_n^{a+1}(e_k) = 0 \Rightarrow T_n^p(e_k) = 0 = P_n(e_k)$

- Les deux applications sont égales sur une base et donc:

$$\boxed{T_n^p = P_n}$$

8) Pour une fonction continue de période 1 les coefficients de Fourier sont les : $c_k(f) = \frac{2\pi}{2\pi} \int_0^1 e^{-2ik\pi x} dx$
ce qui donne le calcul (On sait que pour f continue de période 1 . Tf est continue de période 1 .

$$c_k(Tf) = \int_0^1 e^{-2i\pi kx} Tf(x)\,dx = \int_0^1 e^{-2i\pi kx} \frac{1}{2}(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}))\,dx$$

Or en posant $u = x/2$

$$\int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x}{2})\,dx = \int_0^{1/2} e^{-2i\pi k 2u} f(u)\,du = \int_0^{1/2} e^{-4i\pi ku} f(u)\,du$$

et en posant $u=\frac{x+1}{2}$ avec la simplification $e^{-2ik\pi}=1$

$$\int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x+1}{2})\,dx = \int_{1/2}^1 e^{-2i\pi k(2u+1)} f(u)\,du = \int_{1/2}^1 e^{-4i\pi ku} f(u)\,du$$

Puis en regroupant avec Chasles :

$$c_k(Tf) = \int_0^1 e^{-4i\pi kt}\, f(t)\,dt = c_{2k}(f)$$

On a trouvé :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ c_k(Tf) = c_{2k}(f)}$$

9) On sait que $\widehat{f}:\quad f \longmapsto (\ c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ est linéaire et injective, donc, pour toute $f \in C^0$:

$$f \in \mathrm{Ker}\,(T) \iff Tf = 0 \iff \forall k \in \mathbb{Z},\quad c_k(Tf) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{Z},\quad c_{2k}(f) = 0$$

Ainsi, Ker (T) est l'ensemble des $f \in C^0$ dont les coefficients de Fourier d'indices pairs sont tous nuls.

Partie III : Fonctions Höldériennes

$\alpha = 1$ (interdit par le sujet) donnerait les fonction lipschitzienne.

10) Soit $f \in C^\alpha$. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(y)| &= \left|\frac{1}{2}\left[f(\frac{x}{2})+f(\frac{x+1}{2})\right] - \frac{1}{2}\left[f(\frac{y}{2})+f(\frac{y+1}{2})\right]\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left|f(\frac{x}{2})-f(\frac{y}{2})\right| + \frac{1}{2}\left|f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{y+1}{2})\right| \\ &\le \frac{m_\alpha(f)}{2}\left(|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}|^\alpha + |\frac{x+1}{2}-\frac{y+1}{2})|^\alpha\right) = m_\alpha(f)2^{-\alpha}|x-y|^\alpha \end{aligned}$$

d'où, si

$$\forall (x,y), x \neq y \implies \frac{|Tf(x)-Tf(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant m_\alpha(f)2^{-\alpha}.$$

$\left\{\frac{|Tf(x)-Tf(y)|}{|x-y|^\alpha}\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y\right\}$est bien majoré, donc $Tf \in C^\alpha$ et $\forall f \in C^\alpha,\quad m_\alpha(Tf) \leqslant 2^{-\alpha} m_\alpha(f)$

$$\boxed{C^\alpha \text{ est stable par } T}$$

11)

- Soit $f \in C^\alpha$. On vient de voir : $m_\alpha(Tf) \leqslant 2^{-\alpha} m_\alpha(f)$ et comme $\alpha > 0$ on a $m_\alpha(Tf) \leqslant m_\alpha(f)$.

  D'après $Q2)$: $||Tf||_\infty \leqslant ||f||_\infty$.

  On déduit (en faisant la somme) comme $T_\alpha f = Tf$: $\boxed{||T_\alpha f||_\alpha \leqslant ||f||_\alpha}$.

- En particulier : $\boxed{\sup_{\ ||f||_\alpha=1} ||T_\alpha f||_\alpha \leqslant 1}$. pour avoir l'égalité il reste à trouver une fonction f telle que $|f||_\alpha = 1$ et $|T_\alpha f||_\alpha = 1$

  On vérifie que $f = 1$ convient .

  On conclut :

$$\boxed{\sup_{\ ||f||_\alpha=1} ||T_\alpha f|| = 1}$$

12) On doit vérifier la convergence normale puis que la limite est dans C^0 .

- On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |\lambda^k e_{2^k}(x)| = |\lambda|^k,$ comme $|\lambda| < 1$, la série $\sum_{k\geqslant 0} |\lambda|^k$ converge. Et donc la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

  On note f_λ sa somme.

- $f_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k}$ est une série de fonctions continues qui convergent normalement. La somme est donc continue.

- $f_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k}$ est une série de fonctions de périodes 1et donc est une fonction de période 1 .

$$\boxed{f_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k} \in C^0}$$

remarque : pas CVN f_k est développable en série de Fourier et la somme est le DSF de f_λ

13)

- On sait d'après$Q5$) que $\forall k \in \mathbb{N},\quad Te_{2^k} = \begin{cases} e_{2^{k-1}} \text{ si } k \geq 1 \\ 0 \text{ si } k = 0 \end{cases}$

  Par linéarité de T :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad TS_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k Te_{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k e_{2^{k-1}} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} e_{2^{k-1}} = \lambda \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p e_{2^p} = \lambda S_{n-1}.$$

- On passe à la limite :
  - $\lim(S_{n-1}) = f_\lambda$ par définition de la somme d'une série.
  - $\|TS_n - Tf_\lambda\|_\infty = \|T(S_n - f_\lambda)\|_\infty \leq \|S_n - f_\lambda\|_\infty$, donc d'après le résultat admis $\|TS_n - Tf_\lambda\|_\infty$ tend vers 0 et donc pour tout x , l'encadrement $0 \leq |TS_n(x) - Tf_\lambda(x)| \leq \|TS_n - Tf_\lambda\|_\infty$ montre la convergence simple de TS_n vers Tf_λ
- On peut passer à la limite donc

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$$

- f_λ admet un coefficient de Fourier non nul (celui de e_1 est 1) , donc n'est pas la fonction nulle .

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } T}$$

  On peut aussi utiliser : $f_\lambda(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} \neq 0$, donc : $f_\lambda \neq 0$.

  Danger : l'espace vectoriel n'est pas de dimension finie il faut éviter de parler de continuité pour passer à la limite.

14) On a la série :

$$f_\lambda(x) - f_\lambda(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k}(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_{2^k}(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \left(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)\right)$$

On décompose la somme en deux

$$S_1 = \sum_{k \leq n} \lambda^k \left(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)\right) \text{ et } S_2 = \sum_{k > n} \lambda^k \left(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)\right)$$

en convenant que la première somme est nulle si $n < 0$ (i.e. $|x-y| \geq 1$)

- On majore $\frac{|S_1|}{|x-y|^\alpha}$ par M_1 pour $0 < |x-y| \leq 1$

$$|S_1| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k |\, e^{2i\pi 2^k x} - e^{2i\pi 2^k y}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k |2i\pi 2^k x - 2i\pi 2^k y| = 2\pi \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k 2^k |x-y| = 2\pi \frac{1 - |2\lambda|^{n+1}}{1 - |2\lambda|} |x-y|$$

  donc si $|2\lambda| < 1$:

$$\frac{|S_1|}{|x-y|^\alpha} \leq 2\pi \frac{1 - |2\lambda|^{n+1}}{1 - |2\lambda|} |x-y|^{1-\alpha} \leq 2\pi \frac{1 - \left|2^{1-\alpha}\right|^{n+1}}{1 - |2\lambda|} \left|2^{-n}\right|^{1-\alpha} \leq \frac{2\pi}{1 - |2\lambda|} \left(2^{-n(1-\alpha)} + 2^{1-\alpha}\right) \leq \frac{2\pi}{1 - |2\lambda|} \left(1 + 2^{1-\alpha}\right)$$

  si

$$\frac{|S_1|}{|x-y|^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{n} 2\pi |x-y|^{1-\alpha} \leq (n+1)(2^{1-\alpha})^n$$

  comme $t- > (t+1)x^{-t}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$, on a bien une expression majorée et M_1 existe aussi indépendant de n .

- On majore $\frac{|S_2|}{|x-y|^\alpha}$ par M_2 pour tout $|x-y| > 0$.

$$|S_2| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k \left(|e_{2^k}(x)| + |e_{2^k}(y)|\right) = 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k = \frac{2|\lambda|^{n+1}}{1 - |\lambda|}$$

  La série $\sum |\lambda|^k$ converge car $|\lambda| < 1$

  donc

$$\frac{|S_2|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2|\lambda|^{n+1}}{1 - |\lambda|} . \frac{1}{|x-y|^\alpha} \leq 2 \frac{\left(2^{-\alpha}\right)^{n+1}}{1 - |\lambda|} . \frac{1}{\left(2^{-n-1}\right)^\alpha} = \frac{2}{1 - |\lambda|}$$

  La minoration $Z^{2-n-1} \leq |x-y|$ est évidente si $|x-y| \geq 1$ et découle de l'hypothèse sur n sinon.

- Donc $\forall x \neq y \ \frac{|f_\lambda(x)-f_\lambda(y)|}{|x-y|^g} \leq M_1 + M_2$ et don:

$$\boxed{f_\lambda \in C^\alpha}$$

15) D'après $Q3$, H^0 est stable par T, et d'après $Q13$, C^α est stable par T. Par intersection, $H^\alpha = H^0 \cap C^\alpha$ est stable par T. Comme T_α est l'endomorphisme induit par T sur C^α, et que $H^0 \cap C^\alpha \subset C^\alpha$ on conclut que $\boxed{H^\alpha \text{ est stable par } T_\alpha}$.

16) Montrons, par récurrence sur n, la propriété

$$H_n : \qquad \forall f \in C^0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad T^n f(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n}).$$

- Pour $n = 0$, on a, pour toute $f \in C^0$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $T^0 f(x) = f(x)$ et $2^{-n} \sum_{k=0}^{0} f(k2^{-n} + x2^{-n}) = f(x)$,, donc H_0 est vraie.

- Supposons H_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  On a déjà
  $$T^n f(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n}).$$
  donc
  $$T^{n+1} f(x) = T\left(2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})\right)$$
  donc par linéarité de T puis définition de T :
  $$\begin{aligned} T^{n+1} f(x) &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} T\left(f(k2^{-n} + x2^{-n})\right) \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\left[f(k2^{-n} + \frac{x}{2}2^{-n}) + f\left(k2^{-n} + \frac{x+1}{2}2^{-n}\right)\right] \\ &= 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n-1}) + f\left(\left(k2^{-n} + 2^{-n-1}\right) + x2^{-n-1}\right) \\ &= 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\{2k\}\, 2^{-n-1} + x2^{-n-1}) + f\left(\{2k+1\}\, 2^{-n-1} + x2^{-n-1}\right) \end{aligned}$$
  Dans la $\sum_{k=0}^{2^n-1} f(\{2k\}\, 2^{-n-1} + x2^{-n-1})$ si on prend $k' = 2k$ on a tous les k' pairs entre 0 et $2^{n+1} - 2$ et dans $\sum_{k=0}^{2^n-1} f(\{2k+1\}\, 2^{-n-1} + x2^{-n-1})$ si on pose $k' = 2k+1$ on a tous les k' impairs entre 1 et $2^{n+1} - 1$. Et donc en regroupant :
  $$T^{n+1} f(x) = 2^{-n-1} \sum_{k'=0}^{2^{n+1}-1} f(\{k'\}\, 2^{-n-1} + x2^{-n-1})$$
  ce qui montre H_{n+1}.

$$\boxed{\forall f \in C^0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad T^n f(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n}).}$$

17) Soient $f \in C^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0\ 1]$.
On a, puisque f est 1-périodique et par relation de Chasles :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_{x2^{-n}}^{1+x2^{-n}} f(t)dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k2^{-n}+x2^{-n}\,k}^{(k+1)2^{-n}+x2^{-n}} f(t)dt.$$

D'où, en utilisant le résultat $Q16$) :

$$\left|T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|T^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n}) - \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k2^{-n}+x2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}+x2} f(t)\,dt\right|$$

Mais $f(k2^{-n}+x2^{-n}) = \int_{k2^{-n}+x2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}+x2^{-n}} f(k2^{-n}+x2^{-n})dt$ et donc :

$$\left|T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{k2^{-n}+x2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}+x2^{-n}} \big(f(k2^{-n}+x2^{-n}) - f(t)\big)\,dt\right| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{k2^{-n}+x2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}+x2^{-n}} |f(k2^{-n}+x2^{-n}) - f(t)|\,dt$$

Par définition de C^α on peut majorer $|f(k2^{-n}+x2^{-n}) - f(t)| \leq m_\alpha(f)\,|k2^{-n}+x2^{-n}-t|^\alpha = m_\alpha(f)\,(t-(k2^{-n}+x2^{-n}))^\alpha \leq m_\alpha(f).(2$
pour $t \in [k2^{-n}+x2^{-n}, (k+1)2^{-n}+x2^{-n}]$
On a donc

$$\begin{aligned}\int_{k2^{-n}+x2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}+x2^{-n}} |f(k2^{-n}+x2^{-n}) - f(t)|\,dt &\leq m_\alpha(f)\int_{k2^{-n}+x2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}+x2^{-n}} 2^{-n\alpha}\,dt \\ &= m_\alpha(f).2^{-n}.2^{-n\alpha}\end{aligned}$$

On ajoute ces 2^n inégalités il reste donc :

$$\boxed{\left|T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha}}$$

18) Soient $f \in H^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, d'où,d'après la question précédente : : $\sup_{x\in[0;1]} |T_\alpha^n f(x)| \leqslant m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$,
c'est-à-dire, puisque $T_\alpha^n f$ est 1-périodique : $||T_\alpha^n f||_\infty \leqslant m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$.
D'autre part, d'après$Q10$: $m_\alpha(T_\alpha f) \leqslant 2^{-\alpha} m_\alpha(f)$,
d'où, par une récurrence immédiate : $m_\alpha(T_\alpha^n f) \leqslant (2^{-\alpha})^n m_\alpha(f)$.
On déduit : $||T_\alpha^n f||_\alpha = m_\alpha(T_\alpha^n f) + ||T_\alpha^n f||_\infty \leqslant 2^{-n\alpha}m_\alpha(f) + 2^{-n\alpha}m_\alpha(f) = 2^{1-n\alpha}m_\alpha(f)$.

$$\boxed{||T_\alpha^n f||_\alpha \leq 2^{1-n\alpha} m_\alpha(f)}$$

19)

- D'après 13) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}$, il existe $f_\lambda \in C^\alpha - \{0\}$ telle que $T_\alpha f_\lambda = \lambda f_\lambda$, donc λ est valeur propre de T_α.

  D'autre part, $e_0 \in C^\alpha - \{0\}$ et $T_\alpha e_0 = Te_0 = e_0$, donc 1 est valeur propre de T_α.

  Ceci montre : $\underline{B'(0, 2^{-\alpha}) \cup \{1\} \subset Sp\,(T_\alpha)}$.

- Réciproquement, soit $\lambda \in Sp\,(T_\alpha) - \{1\}$.

  Il existe $f \in C^\alpha - \{0\}$ telle que $T_\alpha f = \lambda f$. Puisque $f \in C^\alpha \subset C^0 = D \oplus H^0$, il existe $k \in \mathbb{C}$, $g \in H^0$ (uniques) tels que : $f = ke_0 + g$.

  On a, puisque la somme $D \oplus H^0$ est directe et que $T_\alpha g \in H^0$ (stabilité de H_0 par T:)

  $$T_\alpha f = \lambda f \iff ke_0 + Tg = \lambda k e_0 + \lambda g \iff (\ k = \lambda k \ \text{ et } \ T_\alpha g = \lambda g)\,.$$

  Comme $\lambda \neq 1$, on déduit $k = 0$ et $T_\alpha g = \lambda g$, donc $f = g \in H^0$. Ainsi, $f \in H^0 \cap C^\alpha = H^\alpha$.

  D'après $Q18$) on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $||T_\alpha^n f||_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha}m_\alpha(f)$.

  Mais $T_\alpha f = \lambda f$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_\alpha^n f = \lambda^n f$.

  D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda|^n ||f||_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha}m_\alpha(f)$,ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(|\lambda|2^\alpha)^n \leqslant \frac{2m_\alpha(f)}{||f||_\alpha}$,

  la suite géométrique $(|\lambda|2^\alpha)^n$ est donc bornée et donc $|\lambda|2^\alpha \leq 1$ soit $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$

  Ceci montre : $Sp\,(T) - \{1\} \subset B'(0, 2^{-\alpha})$

- par double inclusion

$$\boxed{Sp\,(T) = B'(0, 2^{-\alpha}) \cup \{1\}.}$$