e3a PSI 2008 math A

partiel

Questions de cours

Question 1.

1. (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge : **FAUX**, voir par exemple la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$.

2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (u_n)$ converge vers 0 : **VRAI**, car si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et si S_n désigne la somme partielle de rang n, alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. D'où le résultat, puisque (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers la même limite, à savoir la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature : **FAUX**, voir par exemple dans le cours l'exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1+u_n)$. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, (en tant que série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0), tandis que $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, (en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente)

4. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge : **FAUX**, voir par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge (ci-dessus), tandis que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge (série de Riemann).

Question 2.

N'oubliez pas la décroissance pour le critère spécial des séries alternées :
On pose $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. qui est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Donc la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$; en particulier la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ est décroissante de limite nulle. .La série alternée $\sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge. Le premier terme n'a aucune influence sur la nature de la série .

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \text{ converge.}}$$

Préliminaires :

(Moyenne de Césaro cf TD)

1. 1. Pour $n > N$ fixé, d'après l'inégalité triangulaire donne par définition de N :

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} |t_k| \leq (n-N)\varepsilon \leq n\varepsilon.$$

   2. On fixe N comme ci-dessus et on écris grâce au résultat précédent

$$|T_n| \leq \frac{\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|}{n+1} + \frac{1}{n+1} n\varepsilon \leq \frac{\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|}{n+1} + \varepsilon$$

$\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|$ étant une constante (quand n varie) , la suite $\left(\frac{\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|}{n+1}\right)$ converge vers 0.

Donc $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists N'$, $n \geq N' \Rightarrow \frac{\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right|}{n+1} \leq \varepsilon'$

Or par définition de la limite

$$\lim (T_n) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_0 > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ |T_n| \leq \varepsilon_0$$

On part donc de $\varepsilon_0 > 0$, on choisit $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon_0/2$, on en déduit N et N' et $N_0 = \max(N, N')$ est solution du problème.

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ converge vers } 0.}$$

2. Supposons ici que (t_n) converge vers T et posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = t_n - T$. (v_n) converge vers 0 ; nous venons donc de voir que la suite $\left(V_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ converge également vers 0. Or

$$V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T = T_n - T$$

et donc comme (V_n) converge vers 0 , (T_n) converge vers T .

$$\boxed{\text{Si } (t_n) \text{ converge vers } T, \text{ alors } (T_n) \text{ converge aussi vers } T.}$$

3.

1. On utilise $t_n = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right)$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $e^{i\theta} \neq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{in\theta} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \cdot \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \cdot \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = e^{in\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

   En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1} \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}.}$$

   Le calcul ci dessus à l'avantage de donner la somme même si le résultat n'est pas donné par le sujet; dans le cas de ce sujet on peut aussi se limiter à vérifier par récurrence avec les bonnes formules de trigonométrie.

2. D'après le résultat précédent,on a :

$$|T_n| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

   et comme $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est une constante :

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ converge vers } 0.}$$

3. Nous avons ici $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{6n} = \cos 2n\pi = 1$ et $t_{6n+3} = \cos(2n\pi + \pi) = -1$. On a construit deux suites extraites ayant des limites différentes.

$$\boxed{\text{La suite } (t_n) \text{ diverge.}}$$

4. Nous venons de prouver par un contre-exemple que la réciproque du résultat établi au **2** est fausse.

Partie 1

1. Par hypothèse, la suite (na_n) est convergente donc elle est bornée, d'où <u>l'existence de K</u>.

2. Comme $\dfrac{1}{n} \leq 1$ la suite $(|a_n|)$ est aussi majorée par K. Donc pour x dans $[0,1[$, $|a_n x^n| \leq K x^n$ pour tout n. On a donc majorée le terme général (positif) par le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $\in [0,1[$)

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n x^n \text{ converge absolument pour tout } x \in [0,1[.}$$

L'hypothèse supplémentaire nous dit que f se prolonge par continuité en 1. Le problème va alors montrer que la limite est $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. C'est à dire que sous les deux hypothèses du sujet

$$\lim_{x->1^-} \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} a_n \lim_{x->1^-} (x^n)$$

Ce qui n'est pas un résultat évident sur les séries. Pensez aux exemples de non continuité d'une somme de série dans le cours.

$$\begin{aligned} \lim_{x->1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-x) x^n &= \lim \left((1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \right) = 1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x->1^-} ((1-x) x^n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0 \neq 1 \end{aligned}$$

5/2 : Ce n'est pas une démonstration du théorème de continuité au bord d'une série entière. Pour ce théorème l'hypothèse est la convergence de la série $\sum a_n x^n$, donc ici l'hypothèse serait la convergence de $\sum a_n$.

3. On part de la définition de u_n , On ajoute et on retranche $f(x)$ et dans $f(x)$ on casse la somme en 2 :

$$u_n = L - \sum_{k=0}^{n} a_k - f(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = L - \sum_{k=0}^{n} a_k - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

4.
    1. C'est la question 1.1 appliquée à la suite $(a_k)_{k \geq n}$. On a toujours $\lim (k a_k) = 0$, donc suite bornée , donc il existe $M_n = \sup (|k a_k| , k \geq n)$
    2. Par hypothèse, $(k a_k)$ converge vers 0 ; pour $\varepsilon > 0$ fixé il existe donc N tel que : $\forall k \geq N,\ |k a_k| \leq \varepsilon$, d'où comme la borne supérieure est plus petite que tout majorant , $\forall n \geq N,\ 0 \leq M_n \leq \varepsilon$. C'est la définition de la limite:

    $$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \ , \ n \geq N \Rightarrow M_n \leq \varepsilon$$

    $$\boxed{\text{La suite } (M_n) \text{ converge vers } 0.}$$

5. Par définition de M_n, on a :

    $$\forall k \geq n,\ |a_k| \leq \frac{M_n}{k} \leq \frac{M_n}{n}$$

    On peut alors majorer la valeur absolue de l'expression à transformer

    $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{M_n}{n} \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{M_n}{n} \frac{1}{1-x}$$

    On reporte le résultat dans la majoration en valeur absolue de la formule trouvée à la question 3.
    Ensuite, on majore $\left(1 - x^k\right)$

    $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ 1 - x^k = (1-x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leq (1-x) \sum_{j=0}^{k-1} 1 = (1-x)\, k$$

    d'où la seconde majoration.

6. D'après les résultats précédents, avec $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n| &\leq \left| L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |ka_k| + M_n \\ &\leq \left| L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |ka_k| + M_n \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini:

- le premier terme du majorant ci-dessus tend vers 0 d'après l'hypothèse (ii)
- le second aussi d'après (i) et la moyenne de Césaro
- le troisième aussi d'après la question 4.2

. En conclusion

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

7. Par définition de (u_n), nous venons de montrer que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme L, autrement dit que f peut se prolonger au segment $[0, 1]$ avec $f(1) = L$, ce qui fait d'après (ii) que f est alors continue à gauche en 1. Ainsi

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en 1 en posant } f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L.}$$