ENGEES 2001
Epreuve A - Commune PC / PSI

PREMIERE PARTIE

1)

- La fonction est continue sur $\mathbb{R}$
- Sur $[0,+\infty[$ $t^2\left|e^{-t^2+zt}\right| = t^2 e^{-t^2+\mathrm{Re}\,(z)t} = \frac{t^2}{t^2-\mathrm{Re}\,(z)t}\left(\left(t^2-\mathrm{Re}\,(z)t\right)e^{-t^2+\mathrm{Re}\,(z)t}\right)$ de limite $1.0=0$ si t tend vers $+\infty$. donc $t->e^{-t^2+zt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- L'étude de limite est la même sur $]-\infty,0]$

donc

$$\boxed{t->e^{-t^2+zt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

pour la calcul on remarque que :

$$\forall x\in\mathbb{R} : -t^2+xt = -(t-\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{4}$$

et donc en faisant le changement de variable $u=t-\frac{x}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+xt}dt = e^{x^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du$$

$$\boxed{I(x)=\sqrt{\pi}e^{\frac{x^2}{4}}}$$

2) On doit dériver une intégrale à paramètre :
Soit

$$j(x,t)=e^{-(t+ix)^2}=e^{-t^2-2ixt+x^2}$$

- pour tout t réel la fonction $x->j(x,t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et admet la dérivée partielle :

$$\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)=(-2it+2x)e^{-t^2-2itx+x^2}$$

- pour tout x réel la fonction $t->j(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^2\left|j(x,t)\right| = t^2e^{-t^2+x^2}=e^{x^2}\left(t^2e^{-t^2}\right)$ admet une limite nulle quand $t\to\pm\infty$ donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- pour tout x réel la fonction $t->\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^2\left|\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)\right|\sim 2e^{x^2}\left(t^3e^{-t^2}\right)$ admet une limite nulle quand $t\to\pm\infty$ donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Domination pour $(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}$: On note $A=\max(|a|,|b|)$

$$\left|\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-2it+2x\right|e^{-t^2+x^2}\leq 2e^{A^2}\left(|t|+A\right)e^{-t^2}$$

  fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ (toujours des fonctions continues négligeables devant $1/t^2$ en $\pm\infty$) , ce qui établit les hypothèses de domination . D'où : $J\in C^1(\mathbb{R})$ et :

$$J'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)dt$$

- calcul de J' :

$$\begin{aligned} J'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}(-2it+2x)e^{-t^2-2itx+x^2}dt \\ &= ie^{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2t-2ix\right)e^{-t^2-2itx}dt = ie^{x^2}\left[e^{-t^2-2ix}\right]_{t->-\infty}^{t->+\infty} \end{aligned}$$

(On reconnaît la dérivée de $t->e^{-t^2-2itx}$).

Or $\left|e^{-t^2} - 2ix\right| = e^{-t^2}$ de limite nulle en $\pm\infty$

$$\boxed{J\prime(x) = 0}$$

La fonction est constante , elle vaut $\sqrt{\pi}$ en $x = 0$ donc

$$\boxed{J(x) = \sqrt{\pi}}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} : \; -t^2 + iyt = -(t - \frac{iy}{2})^2 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow I(iy) = e^{-\frac{y^2}{4}} J(-\frac{y}{2})$$

$$\boxed{I(iy) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{y^2}{4}}}$$

3) Soit $z = x + iy$:

$$-t^2 + zt = -t^2 + xt + iyt = -u^2 + iyu + \frac{x^2}{4} + i\frac{xy}{2}$$

en posant $u = t - \frac{x}{2}$. On a donc

$$e^{-t^2+zt} = e^{-u^2+iyu} e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}}$$

Si on intègre on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+zt} dt = \int_{-\infty}^{+in} e^{-u^2+iyu} e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}} du = e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}} I(iy) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}}$$

$$\boxed{I(z) = \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{z^2}{4}\right)}$$

SECONDE PARTIE

2) La fonction $t->e^{-ixt}f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $\left|e^{-ixt}f(t)\right| = |f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{\text{la fonction } \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt \text{ est définie pour tout réel } x \text{ .}}$$

3) utilisons le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre:

- pour tout t réel la fonction $x->e^{-ixt}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- pour tout x réel la fonction $t->e^{-ixt}f(t)$ est continue par morceau , intégrable sur $\mathbb{R}$
- domination par $|f|$: $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|f(x,t)| = |f(t)|$, continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

4b) C'est le théorème d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un **segment** par des fonctions en escalier.
Soit ε fixé , et g_ε ainsi construite :

- On a donc d'une part : :
$$\int_{-n}^{n} e^{-ixt} |f(t) - g_\varepsilon(t)| \, dt) \leq \varepsilon \int_{-n}^{n} e^{-ixt} dt \leq \frac{2\varepsilon}{x}$$
- D'autre par g_ε étant en escalier , il existe un partage $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ de $[-n, n]$ telle que g_ε soit constante sur $]a_i, a_{i+1}[$. Notons λ_i cette constante. Donc d'après **4a**:
$$\int_{b_i}^{b_{i+1}} g_\varepsilon(t) dt = \lambda_i \int_{b_i}^{b_{i+1}} e^{-ixt} dt \to_{x->+\infty} 0$$
Donc :
$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-ixt} g_\varepsilon(t) dt = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \int_{b_i}^{b_{i+1}} e^{-ixt} dt \to_{x->+\infty} 0$$
et donc
$$\exists X \text{ , } x \geq X \Longrightarrow \left|\int_{-n}^{n} e^{-ixt} g_\varepsilon(t) dt\right| \leq \varepsilon$$

- En réunissant les 2:
$$\exists X \ , \ x \geq X \Longrightarrow \left| \int_{-n}^{n} e_{\varepsilon}^{-ixt} f(t)dt \right| \leq 2\varepsilon$$
- ce qui assure la limite nulle de $\widehat{f_n}$

4c) On peut alors décomposer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-n} e^{-ixt} f(t)dt + \int_{-n}^{n} e^{-ixt} f(t)dt + \int_{n}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$$

et majorer chaque morceau : Soit $\varepsilon > 0$

- $\left|\int_{-\infty}^{-n} e^{-ixt} f(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{-n} |f(t)|\, dt$; et comme f est intégrable : $\exists N_1 \ , \ n \geq N_1 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{-n} |f(t)|\, dt \leq \varepsilon$ (on remarquera que N_1 ne dépend pas de x)
- $\left|\int_{n}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt\right| \leq \int_{n}^{+\infty} |f(t)|\, dt$; et comme f est intégrable : $\exists N_2 \ , \ n \geq N_2 \Longrightarrow \int_{n}^{+\infty} |f(t)|\, dt \leq \varepsilon$ (on remarquera que N_2 ne dépend pas de x)
- Pour un $n \geq \max(N_1, N_2)$ on applique le résultat de la question précédente : $\exists X \ , \ x \geq X \Longrightarrow \left|\int_{-n}^{n} e_{\varepsilon}^{-ixt} f(t)dt\right| \leq 2\varepsilon$
- et donc pour $x \geq X$: $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e_{\varepsilon}^{-ixt} f(t)dt\right| \leq 4\varepsilon$ ce qui assure la limite nulle :

$$\boxed{\lim_{+\infty}(\widehat{f}) = 0}$$

Le calcul est le même en $-\infty$.

TROISIEME PARTIE

1) Si $f \in S$, pour $p = q = 0$ on a : $f(x) \to 0 \ qd \ x \to \pm\infty$. f est continue sur $\mathbb{R}$, admet une limite nulle en $\pm\infty$ donc $\exists A > 0, |x| \leq A \Rightarrow |f(x)| \leq 1$.
f est donc bornée sur $]-\infty, -A], [A, +\infty[$ et sur $[-A, A]$ car l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, donc est bornée.

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}.$$

De même $f'(x) \to 0 \ qd \ x \to \pm\infty$ donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $K = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$.
D'après l'inégalité des accroissement finis : $(x, y) \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq K\, |x - y|$

$$\boxed{f \text{ est } K\text{-lipschitzienne}}$$

2) Si $f \in S$,

- $S \subset L^1_{cm}(\mathbb{R})$: f est continue sur $\mathbb{R}$ et de la forme $O(\frac{1}{x^2})$ en $\pm\infty$, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- S est non vide : $\widetilde{0} \in S$
- S est stable par combinaisons linéaires : Soit f et g dans S et λ et μ deux scalaires on a
$$\forall (p, q) \, , \lim_{\pm\infty} \left(x^p \left(\lambda f + \mu g\right)^{(q)}(x) \right) = \lambda \lim_{\pm\infty} \left(x^p f^{(q)}(x) \right) + \mu \lim_{\pm\infty} \left(x^p g^{(q)}(x) \right) = 0$$
- donc $\underline{S \text{ est un SEV de } L^1_{cm}(\mathbb{R})}$.

3) La fonction $A(x) = e^{-ax^2}$ est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

- $x^p A(x) = x^p e^{-ax^2} = \left(x^2\right)^{p/2} e^{-ax^2}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, car l'exponentielle de x^2 l'emporte sur la puissance.
- $A'(x) = -2ax\varphi(x)$; donc $x^p A'(x) = -2a \left(x^2\right)^{(p+1)/2} e^{-x^2} - >_{\pm\infty} 0$
- par récurrence on montre que : $\forall q$, $A^{(q)}(x) = P_q(x) e^{-x^2}$ où P_q est une fonction polynômiale . C'est vrai pour $q = 0$ et $q = 1$. Et si $A^{(q)}(x) = P_q(x) e^{-x^2}$ alors $A^{(q+1)}(x) = \left(P_q'(x) - 2xP_q(x)\right) e^{-x^2}$ et $P_{q+1} = P_q' - 2XP_q$ est bien un polynôme. Notons Q son degré et λ_Q son coefficient dominant.

- L'exponentielle l'emporte sur toute puissance donc $\forall p, q \in \mathbf{N}$, $x^p A^{(q)}(x) \sim \lambda_Q x^{p+Q} e^{-x^2} = \lambda_Q \left(x^2\right)^{\frac{p+Q}{2}} e^{-x^2} \to_{\pm\infty} 0$. Donc

$$\boxed{t -> e^{-t^2} \in S}$$

4) Si $f \in S$, alors f' est C^∞ et $\forall p, q \in \mathbf{N}$, $x^p (f')^{(q)}(x) = x^p f^{(q+1)}(x) \to_{\pm\infty} 0$, donc

$$\boxed{f' \in S}$$

Notons $g(x) = xf(x)$: g est C^∞ ; et $\forall p \in \mathbf{N}$, $x^p g(x) = x^{p+1} f(x) \to_{\pm\infty} 0$
et $\forall q \geq 1$, la formule de Leibniz donne $(g)^{(q)}(x) = xf^{(q)}(x) + qf^{(q-1)}(x)$ et donc :

$$\lim_{\pm\infty} \left(x^p g^{(q)}(x)\right) = \lim_{\pm\infty} \left(x^p \left[xf^{(q)}(x) + qf^{(q-1)(x)}\right]\right) = 0$$

Donc

$$\boxed{g \in S}$$

$f \in S \Rightarrow f' \in S$. Donc par récurrence $f^{(q)} \in S$:

- vrai pour $q = 0$ et pour $q = 1$
- Si $f^{(q)} \in S$ alors $\left(f^{(q)}\right)' \in S$ en appliquant le résultat précédent à $f^{(q)}$.

  De même par récurrence

$$\boxed{x^p f^{(q)} \in S}$$

5) Posons $F(x) = e^{-iax} f(x)$. F est C^∞

- $\lim_{\pm\infty}(x^p F(x)) = 0$ car $|x^p F(x)| = |x^p f(x)|$ de limite nulle.
- $F'(x) = e^{-iax}\left[-iaf(x) + f'(x)\right]$ et $g_1 = -iaf + f'$ est une combinaison linéaire d'éléments de S , ($f \in S$ par hypothèse et $f' \in S$ par la question précédente) donc appartient à S .

  Donc $\lim\left(x^p F'(x)\right) = \lim\left(x^p g_1(x)\right) = 0$
- Par récurrence $F^{(q)}(x) = e^{-iax} g_q(x)$ avec $g_q \in S$:

  vrai pour $q = 0$ et $q = 1$.

  Si $F^{(q)}(x) = e^{-iax} g_q(x)$ avec $g_q \in S$ alors $F^{(q+1)}(x) = e^{-iax}\left(-iag_q(x) + g_q'(x)\right)$ et $g_{q+1} = -iag_q + g_q' \in S$ par combinaison linéaire.
- Enfin $\forall p$, $\lim_{\pm\infty}\left(x^p F^{(q)}(x)\right) = \lim_{\pm\infty}\left(x^p g_q(x)\right) = 0$ Donc

$$\boxed{\psi \in S}$$

QUATRIEME PARTIE

1) Utilisons le théorème de dérivation des intégrales à paramètres:

- pour tout t $x -> \varphi(x,t) = e^{-ixt} f(t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -ite^{-ixt} f(t)$.
- pour tout x réel $t -> e^{-ixt} f(t)$ et $t -> -ite^{-ixt} f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- et on a les dominations (qui assurent l'intégrabilité) :
  - $\left|e^{-ixt} f(t)\right| \leq |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (D'après III 2 car $f \in S$)
  - $\left|-ite^{-ixt} f(t)\right| \leq |tf(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $t -> tf(t) \in S$ d'après III 4)

  On en déduit que $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $(\widehat{f})'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-ixt} f(t) dt$

C'est la transformée de Fourier de $t -> -itf(t)$ qui appartient à S d'après III 4

$$\boxed{\left(\widehat{f}\right)' = \widehat{-itf(t)}}$$

Par conséquent $(\widehat{f})'$ est à son tour de classe C^1 et par récurrence $(\widehat{f})$ est C^n et $(\widehat{f})^{(n)}$ est la transformée de Fourier de $t -> f_n(t)\left(-itf(t)\right)^n$ élément de S

- vrai pour $n=0$ et $n=1$
- si c'est vrai pour n On a $(\widehat{f})^{(n)} = \widehat{f_n}$. Comme $\widehat{f_n} \in S$ on a $(\widehat{f_n})$ de classe C^1 et $\left(\widehat{f_n}\right)'$ est la transformée de Fourier de $t->-itxf_n(t) = f_{n+1}(t) \in S$. $(\widehat{f})^{(n)}$ est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $(\widehat{f})^{(n+1)}$ est la transformée de Fourier de $f_{n+1} \in S$.

$$\boxed{\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})}$$

2) On intègre par parties , en utilisant : $\left|e^{-ixt}f(t)\right| = |f(t)| \to 0 \; qd \; x \to \pm\infty$ car $f \in S$:

$$\widehat{(f')}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f'(t)dt = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} \left(\left[e^{-ixt}f(t)\right]_A^B - \int_A^B -ixe^{-ixt}f(t)dt \right) = ix \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} \left(\int_A^B e^{-ixt}f(t)dt \right) = ix\widehat{f}(x)$$

$$\boxed{\widehat{(f')}(x) = ix\widehat{f}(x)}$$

donc $\widehat{(f^{(p)})}(x) = (ix)^p\,\widehat{f}(x)$. On a vu en **II 4** que $\lim_{\pm\infty}\left(\widehat{f}(x)\right) \to 0$. On applique ceci à $f^{(p)}$, d'où : $\lim_{\pm\infty}\left(x^p\widehat{f}(x)\right) = \lim_{\pm\infty}\left(\widehat{f^{(p)}}(x)\right) = 0$ car $f^{(p)} \in S$ (**III 4)** .
Comme pour tout n $(\widehat{f})^{(n)}$ est aussi la transformée de Fourier de f_n élément de S on a la même propriété pour $(\widehat{f})^{(n)}$
Conclusion :

$$\boxed{f \in S \Rightarrow \widehat{f} \in S}$$

3)

$$\widehat{(g_y)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}g_y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(x+y)}f(t)dt = \widehat{f}(x+y)$$

4)

$$f(x) = e^{-ax^2} \Rightarrow \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-at^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\frac{u}{\sqrt{a}}-u^2}\frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}I(-\frac{ix}{\sqrt{a}}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

$$F(x) = e^{-ax^2-ixy} = e^{-ixy}f(x) \Rightarrow \widehat{F}(x) = \widehat{f}(x+y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{(x+y)^2}{4a}}.$$

QUESTION PRELIMINAIRE

- Soit x fixé . $F(t)=\int_a^x f(t,u)du$ est une intégrale à paramètre
  - la fonction : $(t,u)->f(t,u)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[a,x]$,De plus on intègre sur un segment ($[a,x]$ ou $[x,a]$) donc il est inutile de dominer.
    la fonction : $t->\int_a^x f(t,u)du$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\forall x\in I$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left|\int_a^x f(t,u)du\right|\leq\left|\int_a^x|f(t,u)|\,du\right|\leq\left|\int_a^x g(t)du\right|\leq g(t)\,|x-a|$
  - $\phi(t)=|x-a|\,g(t)$ est une fonction indépendante de u , continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $t->g(t)\,|x-a|$ aussi , et d'après le théorème de majoration

$$\boxed{t->\int_a^x f(t,u)du \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

- Or $t->f(t,u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|f(t,u)|\leq g(t)$, intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $(t,u)->f(t,u)$ est une fonction continue sur $[-n,n]\times[a,x]$ .Donc d'après le théorème de Fubini $\int_{-n}^n\left(\int_a^x f(t,u)du\right)dt=\int_a^x\left(\int_{-n}^n f(t,u)dt\right)du$
- On a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x\left(\int_n^{+\infty}f(t,u)dt\right)du\right| &\leq \left|\int_a^x\left(\int_n^{+\infty}|f(t,u)|\,dt\right)du\right|\leq\left|\int_a^x\left(\int_n^{+\infty}g(t)dt\right)du\right|\\ &\leq |x-a|\int_n^{+\infty}g(t)dt\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n->+\infty}\left(\int_a^x\left(\int_n^{+\infty}f(t,u)dt\right)du\right)=0$$

de même

$$\lim_{n->+\infty}\left(\int_a^x\left(\int_{-\infty}^{-n}f(t,u)dt\right)du\right)=0$$

- , on peut considérer $I(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,u)dt$ et écrire que $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,u)dt=\int_n^{+\infty}f(t,u)dt+\int_{-n}^n f(t,u)dt+\int_{-\infty}^{-n}f(t,u)dt$ d'où :

$$\begin{aligned}\int_a^x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,u)dt\right)du &= \int_a^x\left(\int_n^{+\infty}f(t,u)dt\right)du+\int_a^x\left(\int_{-n}^{n}f(t,u)dt\right)du+\int_a^x\left(\int_{-\infty}^{-n}f(t,u)dt\right)du\\ &= \int_a^x\left(\int_n^{+\infty}f(t,u)dt\right)du+\int_{-n}^{n}\left(\int_a^{x}f(t,u)dt\right)du+\int_a^x\left(\int_{-\infty}^{-n}f(t,u)dt\right)du\end{aligned}$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et il reste

$$\boxed{\int_a^x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,u)dt\right)du=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_a^x f(t,u)dt\right)du}$$