ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES A

COMMUNE AUX DEUX FILIERES
PHYSIQUE CHIMIE
PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DURÉE : 3 heures

N.B. : Ce *sujet comporte 3 pages*

Les calculatrices sont autorisées

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I

On donne la valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que pour $z \in \mathbf{C}$ l'intégrale $I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+zt}\,dt$ existe. Calculer $I(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = t - x/2$).

2. Calculer la dérivée de la fonction :

$$J : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2}\,dt. \end{array}$$

on montrera que $J' = 0$

En déduire une expression explicite de $I(iy)$ pour $y \in \mathbf{R}$.

3. Déterminer une expression explicite de $I(z)$ pour tout z complexe.

Soit $L^1_{cm}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes qui sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbf{R}$ (on rappelle que c'est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes).

2. Prouver que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$ existe pour tout $x \in \mathbf{R}$. On notera $\hat{f}(x)$ sa valeur.

3. prouver la continuité de $\hat{f}$.

On note $\hat{f}_n \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longrightarrow \int_{-n}^{n} e^{-ixt} f(t)\,dt \end{array}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

4. a) Soient $b < c$ deux réels. Calculer $\lim_{x \to \pm\infty} \int_b^c e^{-ixt} dt$.

b) Etant donné un réel $\epsilon > 0$ et un entier $n \in \mathbf{Z}$, montrer qu'il existe une fonction g_ϵ en escalier sur l'intervalle $\cancel{[a_n, a_{n+1}]}$ $[-n, n]$ telle que l'on ait $\forall t \in]\cancel{a_n, a_{n+1}}[$ $[-n, n]$, $|f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon$. En déduire que l'on a $\lim_{x \to \pm\infty} \hat{f}_n(x) = 0$.

c) Prouver la propriété : $\lim \hat{f}(x) = 0$.

Dans la suite du problème on conservera la notation $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$ pour $f \in L^1_{cm}(\mathbf{R})$; la fonction $\hat{f}$ sera appelée *transformée de Fourier* de la fonction f.

III

On note dans la suite du problème $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et possédant la propriété suivante :

$$\forall (p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}, \quad \lim_{x \to \pm\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

1. Montrer que toute fonction de $\mathcal{S}$ est bornée et ~~uniformément continue~~ lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

2. Vérifier que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $L^1_{cm}(\mathbf{R})$.

3. Montrer que pour tout $a \in]0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$ est dans $\mathcal{S}$.

4. Pour $f \in \mathcal{S}$, prouver que les fonctions f' et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $\mathcal{S}$. Pour $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, que peut-on dire de la fonction $x \mapsto x^p f^{(q)}(x)$?

5. Pour $a \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{S}$, montrer que la fonction $x \mapsto e^{-iax} f(x)$ est dans $\mathcal{S}$ (on observera que sa dérivée est de la forme $e^{-iax} g(x)$ où $g \in \mathcal{S}$).

IV

1. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est de classe C^1 et que sa dérivée est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$. En déduire que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est de classe C^∞.

2. Soit $f \in \mathcal{S}$. Exprimer la transformée de Fourier de f' au moyen de celle de f. En déduire que $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

3. Soit $f \in \mathcal{S}$. Pour tout $y \in \mathbf{R}$ on définit la fonction :

$$g_y : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & e^{-iyx} f(x). \end{array}$$

Calculer la transformée de Fourier de g_y en fonction de celle de f.

4. Pour $a \in]0, +\infty[$ et $y \in \mathbf{R}$, calculer les transformées de Fourier des fonctions $x \mapsto e^{-ax^2}$ et $x \mapsto e^{-ax^2 - iyx}$.