MINES-I PSI-2002

PREMIERE PARTIE

I-1. Rayon de convergence

a) Exemples :

b)

–> Pour $f_1(t) = \alpha$, on a $u_n = \alpha^n$ donc $F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \dfrac{1}{1-\alpha x}$ de rayon $R = \dfrac{1}{|\alpha|}$

Pour |x|=R la série diverge car le terme général ne tend pas vers 0.

$$\boxed{F_1 = = \frac{1}{1-\alpha x} \text{ est définie sur }]-\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\alpha|}[}$$

–> Pour $f_2(t) = \alpha t$, on a $u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ donc $F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha^n x^n}{n!} = \exp(\alpha x)$ de rayon $R = \infty$

$$\boxed{F_2 = \exp(\alpha x) \text{ est définie sur R}}$$

–> Pour $f_3(t) = pt - 1$, on a $u_n = (p-1)(\frac{p}{2}-1)...(\frac{p}{n}-1) = C_{p-1}^{n}$ (si n<p) et $u_n = 0$ (si $p \le n$) . La série entière a un nombre fin de termes non nuls , c'est un polynôme et $F_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^n = (1+x)^{p-1}$ de rayon $R = \infty$

$$\boxed{F_3 = (1+x)^{p-1} \text{ est définie sur R}}$$

b)

–> Si f s'annule en un point $\frac{1}{k}$, u_n est nul pour $n \ge k$ et F est un polynôme, donc $\boxed{R = \infty.}$

–> Sinon, on peut appliquer le critère de D'Alembert : $\left|\dfrac{u_{n+1}\, x^{n+1}}{u_n\, x^n}\right| = \left|x f(\frac{1}{n+1})\right|$ de limite $|xf(0)|$, donc la série converge si $|xf(0)|<1$ et diverge si $|xf(0)|>1$ donc

$$\boxed{R = 1/|f(0)| \ (= \infty \text{ si } f(0) = 0).}$$

(A vérifier avec les trois exemples du a))

1-2. Suite de terme général u_n

a) Par continuité en $x=0$, comme $f(0) > 0$ on a $f(x) > 0$ au voisinage de 0 . Donc il existe ε tel que, pour $0 < x < \varepsilon$, on ait $f(x) > 0$. Donc pour $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$. Donc les u_n ont même signe pour n assez grand

b) Cas i : Dans le cas |f(0)|<1 , 1 appartient au disque ouvert de convergence , la série $\sum u_n$ converge donc u_n tend vers 0

Cas ii : Dans ce cas 1>R et u_n diverge .

Dans toute la suite du problème la suite u sera une suite à valeurs strictement positives.

I-3. Série de terme général u_n

$w_n = \ln \frac{v_n}{v_{n-1}} = \ln \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} (1 - \frac{1}{n})^\beta\right) = \ln f(\frac{1}{n}) + \beta \ln(1 - \frac{1}{n})$

or $f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{f''(0)}{2 n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\ln(1 - \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2 n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

donc $w_n = \frac{\beta}{n} + \frac{f''(0)}{2 n^2} - \frac{\beta^2}{2 n^2} - \beta \frac{1}{n} - \beta \frac{1}{2 n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$ terme général d'une série absolument convergente. (finir avec un équivalent est dangereux car il peut être nul)

Or $\sum_{k=1}^{n} w_k = \ln v_n$ tend vers $S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ donc v_n admet une limite $L = \exp(S)$ donc $\boxed{u_n \sim L\, n^\beta.}$

I-4. Fonction F

a) La série $\sum u_n |x|^n$ est à termes positifs et $u_n \sim L\, n^\beta$ donc $\sum u_n |x|^n$ convergente si et seulement si il en est de même de $\sum_{n=0}^{\infty} n^\beta |x|^n$.

–> Les deux séries ont même rayon de convergence, et comme l'exponentielle l'emporte sur la puissance de n : $n^\beta |x|^n$ tend vers 0 pour $|x|$ et n'est pas borné pour $|x|>1$. Donc R = 1.

–> F est définie en $x = 1$ si et seulement si $\beta < -1$ car l'équivalent est une série de Riemann.

–> En ce qui concerne le cas $x = -1$ $F(-1)$ existe si et seulement si $\beta < 0$. :

◊ Si $\beta >= 0$ le terme général $u_n (-1)^n \sim L\, n^\beta (-1)^n$ ne tend pas vers 0

◊ Si $\beta < 0$ on applique le critère spécial des séries alternées à $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (-1)^n$, u_n étant positive, de limite nulle et décroissante à partir d'un certain rang puisque $\frac{u_n}{u_{n-1}} = f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n}) < 1$ pour n assez grand.

Si $\beta >= 0$, le domaine est]-1,1[
Si $-1<=\beta <0$, le domaine est [-1,1[
Si $\beta <-1$, le domaine est [-1,1]

b) On a supposé précédemment que f était positive sur [0,1] ce qui impose $\alpha<1$

$u_n\, x^n = (1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{2})...(1-\frac{\alpha}{n})\, x^n = (-x)^n \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}$ donc $\boxed{F(x) = (1-x)^{\alpha-1}}$ de rayon 1.

On a $f'(0)=-\alpha$ F est définie sur]-1,1[pour $\alpha<=0$ et sur [-1,1[pour $0<\alpha<1$

DEUXIEME PARTIE

II-1. Propriétés de la fonction g

a) En 0, $g(x) = \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} = \frac{\pi x - \tan(\pi x)}{\pi x \tan(\pi x)} \sim -\frac{(\pi x)^3/3}{(\pi x)^2} = o(x)$, $g(x)$ tend vers zéro si x tend vers 0 donc est continue en 0 . Pour x non nul le problème de continuité ne se pose pas (différence de quotients de fonctions continues à dénominateur non nul)

$I_\alpha = \int_0^\alpha \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} (\ln(\sin(\pi\alpha)) - \ln(\sin(\pi\varepsilon)) - \ln(\alpha) + \ln(\varepsilon))$

Or $-\ln(\sin(\pi\varepsilon))-\ln(\varepsilon) = \ln \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\varepsilon}$ tend vers $\ln(\pi)$ car $\sin(\pi\varepsilon)\sim\pi\varepsilon$

$$\boxed{I_\alpha = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\right)}$$

b) Comme la fonction donnée est à valeur complexe on introduit les coefficients de Fourier complexes. le calcul donne (avec un dénominateur non nul car α ne peut pas être entier)

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-i\alpha t)\exp(-int)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-i(\alpha+n)t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1-\exp(-i(n+\alpha)2\pi)}{n+\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1-\exp(-i\alpha 2\pi)}{n+\alpha}$$

h est C^1 par morceaux, 2π périodique, La série de Fourier de h converge donc simplement vers h en tout point où h est continue et vers $\dfrac{h(0^+)+h(0^-)}{2} = \dfrac{1+\exp(-2\pi i\alpha)}{2}$ si $x=0$ (Théorème de Dirichlet),

En 0, on a alors :

$$\frac{1+\exp(-2\pi i\alpha)}{2} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1-\exp(-i\alpha 2\pi)}{\alpha} + \frac{1}{2\pi i}(1-\exp(-i\alpha 2\pi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

En multipliant les deux membres par $\exp(\pi i\alpha)$, on obtient :

$$\cos(\pi\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

$$\boxed{g(\alpha) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}}$$

$$I_\alpha = \int_0^{\alpha} g(t)\,dt = \int_0^{\alpha}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2}\,dt$$

La série $\sum \dfrac{2t}{t^2-n^2}$ est à termes négatifs et converge simplement vers $g(t)$. Les fonctions étant continues sur le segment $[0,\alpha]$ y sont intégrable . Enfin $\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{2t}{n^2-t^2}\,dt = -\ln(1-\frac{\alpha^2}{n^2}) \sim \frac{\alpha^2}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente. On peut donc intégrer terme à terme la série

$$I_\alpha = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\alpha}\frac{2t}{t^2-n^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\alpha^2}{n^2})$$

donc :

$$\boxed{\ln\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\alpha^2}{n^2})}$$

II-2. Convergence de la suite (u_n)

On a donc la relation $\dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\alpha^2}{n^2})$. Or $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\alpha^2}{n^2})$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}}$$

TROISIEME PARTIE

III-1. Existence des fonctions G_n et G

G est la fonction Γ d'Euler . Existence classique à montrer :

–> pour tout x strictement positif g_x : $t \to t^{x-1} e^{-t}$ est continue positive sur $]0,+\infty[$

–> Au voisinage de $t=0$ $g_x(t) \sim t^{x-1}$ intégrable sur $]0,1]$ car $x-1>-1$

–> Au voisinage de $t=+\infty$ $\lim\limits_{t\to+\infty} (t^2 g_x(t))=0$ donc g_x est intégrable sur $[1,+\infty[$

–> Pour la continuité on domine pour x élément du ségment [a,b] $t^{x-1} e^{-t}$ par $a^{x-1} e^{-t}$ sur $]0,1]$ et par $b^{x-1} e^{-t}$ sur $[1,+\infty[$, fonction continue intégrable sur $]0,+\infty[$

$\varphi_n(t)$ est continue intégrable sur $]0,+\infty[$ et converge simplement vers $t^{x-1} e^{-t}$ en étant majorée par cette dernière :

–> pour tout x strictement positif et t différent de n $t \to \varphi_n(t)$ est continue positive

–> pour $t=n$ la limite à gauche , la limite à droite et la fonction sont nulles donc on a continuité de $t \to \varphi_n(t)$ en $t=0$

–> Au voisinage de $t=0$ $\varphi_n(t) \sim t^{x-1}$ intégrable sur $]0,1]$ car $x-1>-1$

–> Au voisinage de $t=+\infty$ $\varphi_n(t)$ est nulle donc intégrable sur $[1,+\infty[$

–> Si n tend vers $+\infty$ $\ln((1-\frac{t}{n})^n)=n\ln(1-\frac{t}{n})\sim n(-\frac{t}{n}) = -t$. donc φ_n converge simplement vers $t^{x-1} e^{-t}$

–> Enfin par concavité du ln pour tout réel x : $\ln(1-x)<=x$ et donc $\varphi_n(t) <= t^{x-1} e^{-t}$

On a toute les hypothèses du théorème de convergence dominée .

$\boxed{G_n(x) \text{ converge simplement vers } G(x) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}}$.

III-2. Une expression de $G_n(x)$

a) Pour $n>0$

–> Pour $0<b<1$: $J_n(x) = \int_b^1 t^{x-1}(1-t)^n\,dt = \frac{1}{x} b^x (1-b)^n + \int_b^1 \frac{n}{x} t (1-t)^{n-1}\,dt$ en intégrant par parties

$u=\frac{1}{x} t^x$, $v=(1-t)^n$ étant C^1 sur $[b,1]$ car $x>0$.

–> En faisant tendre b vers 0 on a la relation de récurrence : $J_n(x) = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1)$ et $J_0(x)=\int_0^1 t^{x-1}\,dt=0$

$$\boxed{J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)} = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}}$$

b) $G_n(x) = \int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n\,dt$ on pose $t = nu$ changement de variable affine.

$$= n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,du = \frac{n^x\, n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$$

III-3. Relation des compléments

x et $1-x$ sont strictement positifs et on peur appliquer le résultat précédent :

$$G_n(1-x)= \frac{n^{1-x}\, n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (1-x+k)} = \frac{n^{1-x}\, n!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (k-x)}$$

Donc $G_n(x)\, G_n(1-x) = \dfrac{n^x\, n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}\ \dfrac{n^{1-x}\, n!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(k-x)}$

$$= \frac{1}{x}\ \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)}\ \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-x)}\ \frac{n}{n+1-x}$$

$$= \frac{1}{x}\ \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x/\mathrm{k}+1)}\ \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x/\mathrm{k})}\ \frac{n}{n+1-x}$$

$$= \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-(x/k)^2)}\ \frac{n}{n+1-x}$$

Chaque facteur admet une limite et donc en passant à la limite : $G(x)\, G(1-x) = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{x\pi}{\sin\pi x}\, 1 = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$

$$\boxed{\mathrm{G(x)\, G(1-x)} = \frac{\pi}{\sin\pi \mathrm{x}}}$$