E3A MP 2002

épreuve B , exercice 1

1) On supposera $n \geq 2$ de façon à ce que le noyau ne soit pas réduit au vecteur nul. Si $n = 1$ on a $Ker(u) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, et $\mathrm{Im}(u) = E$ (inclusion et égalité des dimensions) et les résultats sont tous évidents.

(i)

u est de rang 1 donc $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u$ est un sous espace de $\mathrm{Im}(u)$ est un donc sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

- Si $\dim \mathrm{Im}\, u \cap \ker u = 0$, alors $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u = \{0\}$ et donc la somme $\mathrm{Im}(u) \oplus Ker(u)$ est directe. d'après le théorème du rang la dimension est la bonne, on a $\underline{E = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker u}$.
- Si $\dim \mathrm{Im}\, u \cap \ker u = 1$, on a $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u \subset \mathrm{Im}\, u$ et égalité des dimensions et donc $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u = \mathrm{Im}\, u$ ce qui équivaut à $\underline{\mathrm{Im}\, u \subset \ker u}$.

(ii)

e est non nul, donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E. On peut la compléter en une base de E par le théorème de la base incomplète.

$e \in \ker u$, donc dans une telle base, la première colonne de la matrice de u sera nulle. et toutes les autres colonnes seront dans $\mathrm{Im}\, u$ donc colinéaires à e d'où une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

La trace de cette matrice est nulle donc $\underline{\text{dans le cas où } \mathrm{Im}\, u \subset \ker u \text{ on a bien } Tr u = 0}$

(iii)

u est de rang 1 donc 0 est valeur propre de u et $E_0 = \ker u$ est de dimension $n - 1$.

- a) $\Rightarrow$ b) u est diagonalisable et $\dim E_0 = n - 1$ donc il existe une seconde valeur propre a avec $\dim E_a = 1$.

  Dans une base adaptée à la somme directe $E = E_a \oplus E_0$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

  On remarque sur la matrice que $\mathrm{Im}\, u = E_a$. On a donc bien $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker u$
- b) $\Rightarrow$ c) et a) : comme $rg(u) = 1$ $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

  Soit e un vecteur générateur de $\mathrm{Im}\, u$. $u(e) \in \mathrm{Im}\, u$ donc $u(e)$ est colinéaire à e: il existe un réel a tel que $u(e) = a.e$, de plus, comme $\mathrm{Im}\, u$ et $\ker u$ sont en somme directe, $e \notin \ker u$ et $a \neq 0$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker u$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

  On a donc $Tr u = a \neq 0$ et u diagonalisable
- c) $\Rightarrow$ b) On suppose que $Tr(u) \neq 0$. De la question (ii), on déduit que $\mathrm{Im}\, u \not\subset \ker u$ puis de la question (i), on déduit $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker u$

2

(i)

- F_A est une forme : c'est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans le corps de base $\mathbb{C}$
- F_A est linéaire : $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} F_A(\lambda X + \mu Y) &= Tr\left(A.\left(\lambda X + \mu Y\right)\right) = \lambda Tr(AX) + \mu Tr(AY) \\ &= \lambda F_A(X) + \mu F_A(Y) \end{aligned}$$

(linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.)

$$\boxed{F_A \text{ est donc une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

(ii)

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ $F_{\lambda A + \mu B} = \lambda F_A + \mu F_B$. En effet pour toute matrice carrée X :

$$F_{\lambda A + \mu B}(X) = Tr\left((\lambda A + \mu B)X\right) = \lambda Tr(AX) + \mu Tr(BX) = \lambda F_A(X) + \mu F_B(X)$$

(linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.) $\boxed{F \text{ est donc une application linéaire}}$

(iii)

AE_{ij} est la matrice dont la $j$ème colonne est égale à la $i$ème colonne de A et dont toutes les autres colonnes sont nulles. Sa trace est donc égale à a_{ji}: $\boxed{F_A(E_{ij}) = a_{ji}}$

F est linéaire donc est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{(0)\}$

Si F_A est nulle, alors, pour tout (i, j), $a_{ji} = F_A(E_{ij}) = 0$. La matrice A est donc nulle, on en déduit que $\boxed{F \text{ est injective}}$

(iv)

F est une application linéaire injective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* = n^2$.

$$\boxed{F \text{ est donc un isomorphisme}}$$

3)

(i)

F est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ et $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$. Il existe donc une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $f = F_A$ c'est à dire $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(X) = Tr(AX)$.

$$\boxed{\exists! A \ , \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ , \ f(X) = Tr(AX)}$$

(ii)

$\psi_f(X) = 0 \Leftrightarrow f(X)J = 0 \Leftrightarrow f(X) = 0$ ($J \neq 0$). donc

$$\boxed{\ker \psi_f = \ker f}$$

$\psi_f(X) = f(X)J \in Vect(J)$ qui est une droite vectorielle car $J \neq (0)$

l'image de ψ_f est nulle ou est le sous-espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par J

Or f est non nulle donc il existe X_0 tel que $f(X_0) \neq 0$ et donc $\psi_f(X_0) \neq (0)$

$$\boxed{\mathrm{Im}(\psi_f) = Vect(J)}$$

<u>le rang de ϕ_f est égal à 1</u>

(iii)

on fait le calcul: On doit faire la somme des termes diagonaux de la matrice de ψ_f dans la base $(E_{i,k})$.

On cherche donc la coordonnée sur $E_{i,k}$ de $\psi_f(E_{i,k})$ or :

$$\psi_f(E_{ik}) = Tr(AE_{i,k})J = a_{k,i}J \text{ d'après le calcul du 2)iii}$$

La coordonnée sur $E_{i,k}$ est donc $a_{k,i}j_{i,k}$ et donc $Tr(\psi_f) = \sum_{(i,k)} a_{k,i}j_{i,k} = \sum_k \left(\sum_i a_{k,i}j_{k,i}\right)$ on reconnaît la somme des termes diagonaux de AJ.

$$\boxed{Tr(\psi_f) = Tr(AJ)}$$

(iii) peu aussi se faire en utilisant la première question (et on traite alors en même teps les questions 3.iii et 3.iv:

- Si $\mathrm{Im}(\psi_f) \subset \ker(\psi_f)$ on a $Tr(\psi_f) = 0$ (1.ii). Or $\mathrm{Im}(\psi_f) = Vect(J)$ donc si $\psi_f(J) = Tr(AJ)J = 0$ alors $Tr(\psi_f) = 0$

$$Tr(AJ) = 0 \Rightarrow Tr(\psi_f) = 0$$

- Sinon (calcul du 1.iii) la trace de ψ_f est l'unique valeur propre non nulle de ψ_f et le sous espace propre associé est $\mathrm{Im}(\psi_f)$.

  On regarde donc $\psi_f(J) = f(J)J = Tr(AJ)J$: la valeur propre non nulle est $Tr(AJ)$

(iv)

De la question 1.iii, on déduit que <u>ψ_f est diagonalisable si et seulement si $Tr(AJ) \neq 0$</u>