E3A MP 2003

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

   (i) En discutant sur la dimension de $\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}u$, montrer que $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$ ou $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.

   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\mathrm{Im}u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e. Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base?

   (ii) Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, montrer que $Tr(u) = 0$.

   (iii) Montrer alors l'équivalences des trois assertions :

   (a) u est diagonalisable.

   (b) $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$.

   (c) $Tr(u) \neq 0$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ F_A(X) = Tr(AX),$$

   où $Tr(AX)$ désigne la trace de la matrice AX.

   (i) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (ii) On considère l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccl} F & : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ & A & \mapsto & F_A \end{array}$$

   Montrer que F est linéaire.

   (iii) Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on rappelle que la matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté le (i, j)-ième qui est égal à 1). Pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A. En déduire que F est injective.

   (iv) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par :

$$\begin{array}{rccl} \psi_f & : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & X & \mapsto & f(X)J \end{array}$$

   On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (i) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = Tr(AX).$$

   (ii) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quel est l'image de ψ_f? Quel est le rang de ψ_f?

   (iii) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.

   (iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.