Partie I : Etude d'une famille d'équations.

1.

1. F est une fonction C^1 sur $D_F = \mathbb{R}-\{a,b,c\}$ et sur ce domaine

$$F'(\lambda) = -\left(\frac{u^2}{(\lambda-a)^2} + \frac{v^2}{(\lambda-b)^2} + \frac{w^2}{(\lambda-c)^2}\right)$$

On constate que F' est toujours strictement négative .
De plus $\lim_{\pm\infty}(F) = 0$,
On a $F(\lambda) \sim_a \dfrac{u^2}{\lambda - a}$ d'où les limites: $\lim_{a^+}(F) = -\infty$ et $\lim_{a^-}(F) = -\infty$, de même en b et c . D'où le tableau de variation (figure 1) et comme on a sur chaque intervalle une fonction continue strictement monotone de classe C^1 , F admet sur chaque intervalle une fonction réciproque. on utilisera les notations:

- sur $]-\infty,a[$, F est C^∞ strictement décroissante de $]-\infty,a[$ sur $]-\infty,0[$ la dérivée F' n'ayant pas de racine ; F admet donc une fonction réciproque g_1 C^∞ ,strictement décroissante de $]-\infty,0[$ sur $]-\infty,a[$
- sur $]a,b[$, F est C^∞ strictement décroissante de $]a,b[$ sur $]-\infty,+\infty[$ la dérivée F' n'ayant pas de racine ; F admet donc une fonction réciproque g_2 C^∞ , strictement décroissante de $]-\infty,+\infty[$ sur $]a,b[$
- sur $]b,c[$, F est C^∞ strictement décroissante de $]b,c[$ sur $]-\infty,+\infty[$ la dérivée F' n'ayant pas de racine ; F admet donc une fonction réciproque g_3 C^∞ ,strictement décroissante de $]-\infty,+\infty[$ sur $]b,c[$
- sur $]c,+\infty[$, F est C^∞ strictement décroissante de $]c,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ la dérivée F' n'ayant pas de racine ; F admet donc une fonction réciproque g_4 C^∞ ,strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $]c,+\infty[$

On en déduit donc que $F(\lambda) = 0$ admet exactement deux solutions , l'une sur $]a,b[$ et l'autre sur $]b,c[$.
remarque 1 : On peut aussi utiliser les bijections monotones sur chaque intervalle sans introduire les g_i . On aura toutefois besoin de ces fonctions pour étudier plus tard la classe des λ_i
remarque 2 : On peut remarquer que si on réduit F au même dénominateur on obtient $F(\lambda) = 0$ équivalent à une équation de degré au plus 2 . Ce qui assure l'existence d'au plus 2 racines.

2. On étudie :

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-2} = \frac{3\lambda^2 - 4}{\lambda(\lambda^2-4)}$$

la fonction F a les racines $\pm 2/\sqrt{3}$.Elle est impaire.
graphe figure 2
Vous avez du utiliser la machine à calculer à cette question.

2.

1. **a)**
   - si $t > 0$ les variations (strictes) de F donnent 3 racines à l'équation $F(\lambda) = 1/t$: $\lambda_1(t) = g_2(1/t)$, $\lambda_2(t) = g_3(1/t)$, $\lambda_3(t) = g_4(1/t)$
   - si $t < 0$ les variations (strictes) de F donnent 3 racines à l'équation $F(\lambda) = 1/t$: $\lambda_1(t) = g_1(1/t)$, $\lambda_2(t) = g_2(1/t)$, $\lambda_3(t) = g_3(1/t)$

   b) Si t tend vers 0^+ alors $\lambda_1(t)$ tend vers $\lim_{+\infty}(g_2) = a^+$. Si t tend vers 0^- alors $\lambda_1(t)$ tend vers $\lim_{-\infty}(g_1) = a^-$. d'après les limites de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

$$\boxed{\lim_0 (\lambda_1) = a}$$

2. on a déjà signalé que les fonctions g_i étaient C^∞ sur leur intervalle de définition. Les fonctions λ_i sont donc C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ par composition.
   a) Comme on a effectué un prolongement par continuité en a, b, c

$$\boxed{\forall i \in \{1,2,3\} , \lambda_i \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

   b) On a :

$$\frac{\lambda_1(t) - a}{t} = u^2 + (\lambda_1(t) - a)\left\{\frac{v^2}{\lambda_1(t) - b} + \frac{w^2}{\lambda_1(t) - c}\right\}$$

On en déduit comme $a \neq b$ et $a \neq c$ que

$$\lim_0 \left(\frac{\lambda_1(t) - \lambda_1(0)}{t - 0}\right) = \lim_0 \left(\frac{\lambda_1(t) - a}{t}\right) = u^2 + (0)\left\{\frac{v^2}{a-b} + \frac{w^2}{a-c}\right\} = u^2$$

Donc $\underline{\lambda_1 \text{ est dérivable en 0 de dérivée } u^2}$
Comme on sait déja que λ_1 est dérivable en 0on a bien :

$$\boxed{\lambda_1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

c) De même λ_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lambda_2'(0) = v^2$ et λ_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lambda_3'(0) = w^2$

3.

a)

- si t tend vers $+\infty$ $\lambda_1(t) = g_2(1/t)$ tend vers $g_2(0) = \rho_1$, $\lambda_2(t) = g_3(1/t)$ tend vers ρ_2 ,$\lambda_3(t) = g_4(1/t)$ tend vers $+\infty$
- si t tend vers $-\infty$ $\lambda_1(t) = g_1(1/t)$ tend vers $\lim\limits_{0}(g_1) = -\infty$, $\lambda_2(t) = g_2(1/t)$ tend vers ρ_1 ,$\lambda_3(t) = g_3(1/t)$ tend vers ρ_2
- pour le tableau : voir le tableau de variation qui donne la synthèse des résultats.

b) On effectue un développement asymptotique en utilisant le fait que $\dfrac{1}{\lambda_1}$ tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{\lambda_1 - a} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{v^2}{1-\frac{b}{\lambda_1}} + \frac{w^2}{1-\frac{c}{\lambda_1}}\right) \\
&= \frac{1}{t} - \frac{1}{\lambda_1}\left(v^2\left\{1 + \frac{b}{\lambda_1} + o\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\right\} + w^2\left\{1 + \frac{c}{\lambda_1} + o\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\right\}\right) \\
&= \frac{1}{t} - \frac{1}{\lambda_1}\left(v^2 + w^2\right) - \frac{1}{\lambda_1^2}\left(bv^2 + cw^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_1^2}\right)
\end{aligned}$$

En développant ensuite $\dfrac{u^2}{\lambda_1 - a}$ on a :

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\lambda_1}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + \frac{1}{\lambda_1^2}\left(au^2 + bv^2 + cw^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_1^2}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + \frac{1}{\lambda_1^2}\left(au^2 + bv^2 + cw^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_1^2}\right)} \\
&= \frac{\lambda_1}{u^2 + v^2 + w^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{u^2 + v^2 + w^2}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}\right) \\
&= \frac{\lambda_1}{u^2 + v^2 + w^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{u^2 + v^2 + w^2}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda_1}{u^2 + v^2 + w^2} - \left(\frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{\left(u^2 + v^2 + w^2\right)^2}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

d'où l'asymptote d'équation

$$t = \frac{\lambda_1}{u^2 + v^2 + w^2} - \left(\frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{\left(u^2 + v^2 + w^2\right)^2}\right)$$

ou encore :

$$\boxed{\lambda = (u^2 + v^2 + w^2)t + \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{u^2 + v^2 + w^2}}$$

si t tend vers $+\infty$, on aura alors λ_3 de limite $+\infty$, et donc les mêmes calculs et la même asymptote.
c) application numérique : $u = v = w = 1$, $a = -2, b = 0, c = 2$ d'où l'asymptote $\lambda = 3t$.
Pour le tableau on remarquera que par composition des g_i et de $t -> 1/t$ décroissante , chaque fonction λ_i est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et même par continuité en 0 sur $\mathbb{R}$
tableau de variation : figure 3
graphe : figure 4 .
Votre machine doit être capable de calculer une valeur approchée d'une racine d'une équation sur un intervalle fixée. Vous pouvez donc construire quelques points du graphe pour vérifier l'allure. Par exemple si $t = 10$ $\lambda_3 = 30,08$, c'est donc bien compatible abec l'asymptote $\lambda_1 = 3t$

Partie II : Etude de matrices

attention : toutes les matrices ne sont pas carrées ; U est une colonne , ${}^tU$ est une ligne , $U\,{}^tU$ est carrée 3×3 et ${}^tU.U$ est une matrice 1×1

5/2 : le corrigé est rédigé sans utiliser les propriétés de réduction des matrices symétriques réelles. En utilisant des bases orthonormées de vecteurs propres on ne gagne presque rien dans ce sujet.

1. On remarque que les colonnes de B sont proportionnelles. B est de rang 1et le calcul donne:

$$\boxed{\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

   $\operatorname{Ker}(B)$ est le plan d'équation $x+2y+3z=0$

2.
   - Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $T=0$ et donc $rg(T)=0$, $T^2=0=T$, $E_0(T)=\mathbb{R}^3$, T est diagonalisable.
   - Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ $T = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$
     1. les trois colonnes de T sont des multiples de U . Et comme $U\neq 0$, l'un des termes diagonaux est non nul. donc $\boxed{rg(T)=1}$
     2. $T^2 = \left(u^2+v^2+w^2\right)T$
     3. D'après le rang , 0 est valeur propres de T , Le sous espace propre est le noyau : le plan $ux+vy+wz=0$. Donc 0 est de multiplicité au moins 2

        Il ne manque plus qu'une valeur propre : la trace donne $u^2+v^2+w^2\neq 0$. Le calcul donne $E_{u^2+v^2+w^2} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

        La somme des dimensions des sous espaces propres est 3 la dimension de l'espace :

        $$\boxed{T \text{ est diagonalisable}}$$

        On peut aussi utiliser le polynôme annulateur $X^2-(u^2+v^2+w^2)X$.

3.
   1. Le déterminant de V est toujours nul donc $rg(V)\leq 2$
      Si $w\neq 0$, les deux premières colonnes sont libres .Si $u\neq 0$, les deux dernières colonnes sont libres. Si $v\neq 0$, les colonnes 1 et 3 sont libres Comme $U\neq 0$, l'une au moins des trois conditions est remplie. donc $\boxed{rg(V)=2}$.
   2. Le polynôme caractéristique de V est $-\lambda\left(\lambda^2+u^2+v^2+w^2\right)$. Comme $u^2+v^2+w^2>0$, on a une seule racine réelle 0 qui est simple. 0 est la seule valeur propre
   3. et comme $1<3$, V n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$

4.
   1. On trouve $\Omega = T$
   2. On a $S=(u^2+v^2+w^2)I_3-T$, donc si on pose $T=P\Delta P^{-1}$ on obtient $S=P\left((u^2+v^2+w^2)I_3-\Delta\right)P^{-1}$. T étant diagonalisable on peut choisir P pour que Δ soit diagonale , alors $(u^2+v^2+w^2)I_3-\Delta$ est diagonale et S est donc diagonalisable.
   3. Le calcul précédent donne les valeurs propres et les sous espaces propres (même matrice de passage , donc même base de vecteurs propres) :

$$\boxed{\begin{array}{c} E_{u^2+v^2+w^2}(S) = E_0(T) \text{ le plan } ux+vy+wz=0 \\ E_0(S) = E_{u^2+v^2+w^2}(T) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\end{array}}$$

Partie III : spectre d'une matrice perturbée

1. $D(t) = aI_3 + tT$. La décomposition précédente $T = P\Delta P^{-1}$ donne $D(t) = P\left(aI_3 + t\Delta\right)P^{-1}$. Donc $D(t)$ est diagonalisable de valeurs propres a (double) et $a + t\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$ (simple)

   Les sous espaces propres de $D(t)$ sont ceux de T .

2.

   1.

      a) Par hypothèse $X \neq 0$ et $D(t)X = \lambda X$. On a donc

      $$(D + tT)\,X = \lambda X$$

      Soit

      $$(\lambda I_3 - D)\,X = tTX = tU\,{}^tUX$$

      Comme $\lambda \notin \{a, b, c\}$, λ n'est pas valeur propre de D et donc $(\lambda I_3 - D)^{-1}$ est inversible. On peut donc multiplier à gauche l'égalité précédente par ${}^tU\,(\lambda I_3 - D)^{-1}$, puis sortir le scalaire t.

      $${}^tUX = t\,{}^tU\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U\;{}^tUX$$

      b) si ${}^tUX = 0$ alors $tU\,{}^tUX = 0$ et donc $(\lambda I_3 - D)\,X = 0$. Comme $(\lambda I_3 - D)$ est inversible on a $X = 0$ ce qui est absurde pour un vecteur propre.

      On peut constater que ${}^tU\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U$ est de taille 1×1 et si on fait le calcul on trouve : ${}^tU\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U \;=\; \left(\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda -\right.$

      On a donc :

      $$t\left(\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}\right)\,{}^tUX = {}^tUX$$

      Or ${}^tUX$ est aussi une matrice de taille 1×1 supposé non nulle. donc $t\left(\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}\right) = 1$. On peut diviser par $t \neq 0$

      $$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}$$

      c) Réciproquement si λ vérifie l'équation précédente on a $t\,{}^tU\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U = 1$.
      On multiplie à gauche l'égalité par U et on déplace le scalaire et on simplifie $U\,{}^tU = T$:

      $$t\,T\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U = U$$

      Or $U = (\lambda I_3 - D)\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U$ donc :

      $$t\,T\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U = (\lambda I_3 - D)\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U$$

      on passe tout à gauche et on obtient :

      $$(D + tT - \lambda I_3)\,(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U = 0$$

      Or la matrice U est non nul et $(\lambda I_3 - D)^{-1}$ inversible donc $(\lambda I_3 - D)^{-1}\,U \neq 0$ est un vecteur propre de $D + tD$ associé à la valeur propre λ.

      $$\boxed{\lambda \in Sp(D(t)) \Leftrightarrow \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}}$$

      Remarques :

      - *Je fais apparaître le vecteur propre proposé à la question 3.2 . (De l'intéret de lire la suite du sujet)*
      - $\det(D(t) - \lambda I_3)$ *est horrible à calculer*

3. 1. D'après la partie 1 l'équation $\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}$ admet trois racines (en λ) distincts .

      Ces trois valeurs ne peuvent être ni a , ni b , ni c . La condition $\lambda \notin \{a, b, c\}$ est donc vérifiée et on peut utiliser la question précédente.

      $D(t)$ est de taille 3×3 et admet 3 valeurs propres distinctes. Donc $D(t)$est diagonalisable.

   2. Le calcul a été fait à la question précédente :2.2:On a trouvé un vecteur propre et le sous espace propre est une droite . Donc on sait calculer tous les vecteurs propres.

3. une base de vecteurs propres est donc : $\left((\lambda_1(t)I_3 - D)^{-1}U, (\lambda_2(t)I_3 - D)^{-1}U, (\lambda_3(t)I_3 - D)^{-1}U\right)$ ou encore

$$\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{u}{\lambda_1(t)-a} \\ \dfrac{v}{\lambda_1(t)-b} \\ \dfrac{w}{\lambda_1(t)-c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{u}{\lambda_2(t)-a} \\ \dfrac{v}{\lambda_2(t)-b} \\ \dfrac{w}{\lambda_2(t)-c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{u}{\lambda_3(t)-a} \\ \dfrac{v}{\lambda_3(t)-b} \\ \dfrac{w}{\lambda_3(t)-c} \end{pmatrix}\right\}$$

4.
- Si $a = b \neq c$, la question 2 reste valable

$$\lambda \in Sp(D(t)) \Leftrightarrow \frac{u^2+v^2}{\lambda - a} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}$$

L'étude de $\theta(\lambda) = \dfrac{u^2+v^2}{\lambda - a} + \dfrac{w^2}{\lambda - c}$ sur $\mathbb{R} - \{a, c\}$, va montrer que pour $t \neq 0$ il existe deux racines distinctes , et distinctes de a et c .

- La troisième valeur propre est a car $D(t) - aI_3 = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & uw & c^2 - a^2 + w^2 \end{pmatrix}$, Les deux premières colonnes sont liés (multiples de U) donc $D(t) - aI_3$ n'est pas inversible et a et valeur propre de $D(t)$
- On a donc trois valeurs propres distinctes . les sous espaces propres sont des droites . Pour $E_a(D(t))$ on a la solution évidente $\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{E_a(D(t)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Le polynôme caractéristique donne encore trop de calculs.