Banque ≪Agro -Véto≫
A - 0207

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les parties I et II sont indépendantes. Les graphes seront exécutés sur du papier millimétré. Dans tout le problème le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

Partie I : Etude d'une famille d'équations.

Dans cette partie, on suppose donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $a < b < c$ et $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^*)^3$.
On considère pour tout $t \neq 0$ l'équation d'inconnue λ :

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t} \qquad (E_t)$$

1.1. Donner les variations de la fonction :

$$F : \lambda \longmapsto \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}.$$

En déduire que F prend la valeur 0 en deux points ρ_1 et ρ_2 vérifiant $\rho_1 < \rho_2$.
Il est fortement conseillé de donner un tableau de variation et de justifier l'existence d'antécédants uniques par un énoncé clair du théorème de la bijection réciproque.

1.2. Un cas particulier : tracer le graphe de F pour $a = -2, b = 0, c = 2$ et $u = v = w = 1$.

2. Dans la suite (a, b, c) sont quelconques et vérifient $a < b < c$.
2.1.a. Montrer que pour tout $t \neq 0$ l'équation E_t admet trois racines réelles distinctes, notées $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.
Indication : On distinguera deux cas, selon que $t > 0$ ou $t < 0$.
2.1.b. Montrer que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs positives puis que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs négatives.

Remarque et notation.
On admettra que les deux fonctions λ_2 et λ_3 admettent également des limites en 0, respectivement b et c.
On notera encore λ_1, λ_2 et λ_3 les fonctions prolongées par $\lambda_1(0) = a$, $\lambda_2(0) = b$, $\lambda_3(0) = c$.

2.2. Continuité et dérivabilité.
2.2.a. Montrer que les fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 sont continues sur $\mathbb{R}$.
2.2.b. En utilisant l'égalité (E_t) pour $\lambda = \lambda_1(t)$, montrer que $\dfrac{\lambda_1(t) - a}{t}$ tend vers u^2 quand t tend vers 0.
En déduire que λ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2.2.c. Montrer de même que λ_2 et λ_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$; donner $\lambda_2'(0)$ et $\lambda_3'(0)$.

2.3. Etude des fonctions à l'infini.
2.3.a. Caractériser les limites éventuelles des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 lorsque t tend vers $+\infty$, puis lorsque t tend vers $-\infty$.
Résumer les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.
2.3.b. Exprimer $\dfrac{u^2}{\lambda_1(t) - a}$ à l'aide de $\dfrac{1}{\lambda_1(t)}, \dfrac{1}{\lambda_1(t)^2}$ et d'une fonction négligeable devant $\dfrac{1}{\lambda_1(t)^2}$ quand t tend vers $-\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote à la fonction λ_1 en $-\infty$. Qu'en est-il pour la fonction λ_3 en $+\infty$?
2.3.c. Dresser le tableau de variation des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3. Tracer sur une même feuille les graphes de ces fonctions sous les hypothèses de la question 1.2.

Partie II : Etude de matrices.

Dans la suite du problème, si M est une matrice ${}^tM$ désigne sa transposée.
Si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $U{}^tU$ est la matrice $\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$.
$\mathrm{Ker}({}^tU)$ désigne l'ensemble des matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, vérifiant

$$ux + vy + wz = 0.$$

Si M est une matrice carrée et λ une valeur propre de M, on note E_λ^M le sous-espace propre correspondant.
Enfin, pour tout n entier naturel, I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire $X \longmapsto BX$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même associée à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

On note U=$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée et on pose $T = U^tU$.

2.1. Déterminer le rang de T. On discutera selon que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou non.
2.2. Montrer que T^2 est proportionnel à T.
2.3. Déterminer les sous-espaces propres de T. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose pour la suite de cette partie que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et on pose $V = \begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}$.

3.1. Déterminer le rang de V.
3.2. Montrer que 0 est la seule valeur propre de V.
3.3. La matrice V est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

4.1. Calculer les matrices $S = {}^tVV$ et $\Omega = (u^2 + v^2 + w^2)I_3 - S$.
4.2. La matrice S est elle diagonalisable ?
4.3. En utilisant le fait que les valeurs propres de S s'obtiennent à l'aide des valeurs propres de T, déterminer les sous-espaces propres de S.

Partie III : Spectre d'une matrice perturbée.

Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in (\mathbb{R}^*)^3$ un vecteur.

On note de même qu'au II : $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et $T = U\,{}^tU$.

Soient a, b, c trois réels, on note D la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $D(t) = D + tT$.

1. On suppose dans cette question que $a = b = c$. Quelles sont les valeurs propres de $D(t)$? Quels sont les sous-espaces propres associés ?

2. Retour au cas général
On suppose dans cette question $t \neq 0$ et $\lambda \notin \{a, b, c\}$

2.1. On suppose que λ est valeur propre de $D(t)$. On note X un vecteur propre de $D(t)$ pour la valeur propre λ.
2.1.a. Montrer que X vérifie $(\lambda I_3 - D)X = tU\,{}^tUX$ mais aussi :

$$ {}^tUX = t\,{}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U({}^tUX). $$

2.1.b. Montrer que ${}^tUX \neq 0$ et en déduire que λ vérifie l'équation

$$ {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \frac{1}{t}. \qquad (2) $$

2.1.c. Montrer que si λ satisfait à l'équation (2) alors il vérifie l'équation (E_t) définie dans la partie I.

2.2. Etudier la réciproque et montrer que λ est valeur propre de $D(t)$ si et seulement si il vérifie (E_t).

3. On suppose dans cette question que $a < b < c$ et $t \neq 0$.
Rappeler les résultats obtenus dans la partie I quant aux solutions de l'équation (E_t).
3.1. Montrer que $D(t)$ est diagonalisable.
3.2. Montrer que les vecteurs $(\lambda_i(t)Id - D)^{-1}U$ sont vecteurs propres de $D(t)$.
3.3. En déduire une base de vecteurs propres de $D(t)$.

4. On suppose dans cette question que $a = b$ et $a \neq c$.
4.1. Montrer que, pour $t \neq 0$, la matrice $D(t)$ admet trois valeurs propres réelles.
4.2. Déterminer le sous-espace propre associé à a.

FIN