$\boxed{\text{ENSAIT 2003 MATHS 2}}$

PRELIMINAIRE

Si P est un polynôme alors $f_n(P)$ aussi par dérivation , somme et produit de polynômes. Et

$$\deg(f_n(P)) \leq \max(2+\deg P", 1+\deg P, \deg P) = \deg(P)$$

donc $P \in \mathbb{C}_n[X] \Rightarrow f_n(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

De plus f_n est linéaire (par linéarité de la dérivation) et linéarité du produit par un polynôme constant. donc $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$

PREMIERE PARTIE

1) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Une base de $\ker(f_3)$ est $(X, 1+X^2)$; une base de $\text{Im}(f_3)$ est $(1, -3X+X^3)$

La réunion de ces deux bases est $\left(P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2+1, P_3 = X^3-3X\right)$, c'est une famille étagée en degré : $\deg(P_i) = i$ donc une base de $\mathbb{C}_3[X]$

$$\boxed{\ker(f_3) \oplus \text{Im}(f_3) = \mathbb{C}_3[X]}$$

3) $M_3^2 = M_3$ donc $f_3 \circ f_3 = f_3$: $\underline{f_3 \text{ est un projecteur}}$, donc $\underline{f_3 \text{ est diagonalisable}}$. Ses valeurs propres sont 0 , de SEP : $\ker(f_3)$, de base $P_1 = X$, $P_2 = 1+X^2$; et 1 , de SEP : $\text{Im}(f_3)$, de base $Q_1 = 1$, $Q_2 = -3X+X^3$

DEUXIEME PARTIE

1) $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) M_4 étant triangulaire , ses valeurs propres sont ses termes diagonaux :$\lambda_1 = 0$ (double) , $\lambda_2 = 1$ (double) et $\lambda_3 = 3$ (simple).

Les vecteurs propres de f_3 sont aussi vecteurs propres de f_4 donc :

P_1, P_2 sont vecteurs propres de f_4 associés à $\lambda_1 = 0$ d'où $\dim(E_{\lambda_1}) \geq 2$, et comme la multiplicité est 2 $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$

P_0, P_3 sont vecteurs propres de f_4 associés à λ_2 et λ_2 est valeur propre double d'où $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$

λ_3 est simple donc $\dim(E_{\lambda_3}) = 1$

La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à la dimension de l'espace :

$$\boxed{f_4 \text{ est diagonalisable}}$$

remarque : *Le polynôme $X^4 - 2X^2 + 1$ est vecteur propre pour la valeur propre 3 .,mais ce n'est pas demandé*

3) Soient $D = diag(0,0,1,1,3)$, $D_a = diag(0,0,1,1,0)$, $D_b = diag(0,0,0,0,3)$.On a trois matrices diagonales telles que $D = D_a + D_b$.

D est semblable à M_4 donc il existe $P \in GL_5(\mathbb{C})$ telle que $M_4 = PDP^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned} D &= D_a + D_b \Rightarrow M_4 = PD_aP^{-1} + PD_bP^{-1} = A + B \\ D_a^2 &= D_a \Rightarrow PD_a^2P^{-1} = PD_aP^{-1} \Rightarrow A^2 = A \\ D_b^2 &= 3D_b \Rightarrow B^2 = 3B \\ D_aD_b &= D_bD_a = 0_5 \Rightarrow AB = BA = 0_5 \end{aligned}$$

En posant

$$\boxed{A = PD_aP^{-1}} \text{ et } \boxed{B = PD_bP^{-1}}$$

. Donc le couple (A, B) convient

remarque :on peut aussi faire un calcul directe en remarquant que les hypothèses impliquent $M_4^2 = A + 3B$ et donc $A = \frac{1}{2}(3M_4^2 - M_4)$ et $B = \frac{1}{2}(M_4^2 - M_4)$) . ce qui prouve aussi l'unicité de (A, B) .

De plus : $rg(D_a) = 2 \Rightarrow \boxed{rg(A) = 2}$; $rg(D_b) = 1 \Rightarrow \boxed{rg(B) = 1}$

4) $M_4 = A + B$ et $AB = BA = 0_5$ donc d'après la formule du binôme : $(M_4)^n = A^n + B^n$. $B^2 = 3B$ d'où $B^n = 3^{n-1}B$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } (M_4)^n = A + 3^{n-1}B}$$

TROISIEME PARTIE

1) Soit P un polynôme non nul de degré k : $P = \sum_{k=0}^{k} p_i X^i$ avec $p_k \neq 0$ et $k > 2$. Alors P' est de degré $k-1$ et P" de degré $k-2$. Le coefficient dominant de $f_n(P)$ est alors

$$\frac{1}{2}k(k-1)p_k - kp_k + p_k = \left[\frac{1}{2}k(k-1) - k + 1\right] p_k = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)p_k \neq 0$$

$$\boxed{f_n(P) = \widetilde{0} \Rightarrow \deg(P) \leq 2} .$$

On est alors ramené à $\mathbb{C}_3[X]$ et on utilise la première partie. Donc

$$\boxed{\ker(f_n) = Vect(X, 1 + X^2)}$$

On remarque aussi que si $k \notin \{1, 2\}$, $\deg f_n(P) = k = \deg P$.

2) $\dim(\mathrm{Im}(f_n)) = \dim(\ \mathbb{C}_n[X]) - \dim(\ker(f_n)) = n - 1$. La famille $(f_n(1), f_n(X^3), ..., f_n(X^n))$ comporte $n-1$ éléments appartenant à $\mathrm{Im}(f_n)$. De plus cette famille est libre car la famille est étagée en degré : $\deg(f_n(1)) = 0$ et pour $k \geq 3$ $\deg f_n(P_k) = k$.

$$\boxed{\left(f_n(1), f_n\left(X^3\right), \cdots f_n\left(X^n\right)\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f_n)}$$

3) D'après 1) pour tout k $f_n(X^k) \in Vect\left(X^i\right)_{i=0}^{k}$: la matrice de f_n dans la base $(X_i)_{i=0}^{n}$ est triangulaire , ses valeurs propres sont les termes diagonaux : $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ pour $0 \leq k \leq n$. On trouve

- 0 double (pour $k = 1$ et $k = 2$), avec P_1, P_2 pour vecteurs propres donc $\dim(\ker(f_n)) = 2$ est la multiplicité.
- 1 double (pour $k = 0$ et $k = 3$) , avec P_0, P_3 pour vecteurs propres donc $\dim(\ker(f_n - Id)) = 2$ est la multiplicité
- pour $x \geq 4$ $x -> \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ est strictement croissante (dérivée > 0),donc pour $k \geq 4$ $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ est racine simple donc le SEP associé est de dimension 1 .
- On vérifie $2 + 2 + (n-3) = n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$

$$\boxed{f_n \text{ est diagonalisable}}$$

4)

- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan donc :

  $$\boxed{\dim(\ker(\phi_1)) = n}$$

  (idem pour ϕ_2) ;

  on peut le revérifier avec le théorème du rang.
- deux formes linéaires sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

  ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas proportionnelles donc $\ker(\phi_1) \neq \ker(\phi_2)$. On a donc $Ker(\phi_1) \cap Ker(\phi_2) \subsetneq Ker(\phi_1)$ et donc $\dim\left(Ker(\phi_1) \cap Ker(\phi_2)\right) < \dim(Ker(\phi_1)) = n$

  Appliquons la formule de Grassmann : $\dim(Ker(\phi_1) + Ker(\phi_2)) = \dim(Ker(\phi_1)) + \dim(Ker(\phi_2)) - \dim(Ker(\phi_1) \cap Ker(\phi_2))$

on a donc $\dim(Ker(\phi_1) \cap Ker(\phi_2)) \geq \dim(Ker(\phi_1)) + \dim(Ker(\phi_2)) - \dim(Ker(\phi_1) + Ker(\phi_2)) \geq n + n - (n+1) = n - 1$

$$\boxed{\dim(\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)) = n - 1}$$

5) $Q = f_n(P) \Rightarrow Q'(X) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'''(X) + XP''(X) - XP''(X) - P'(X) + P'(X) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'''(X)$

donc $Q'(1) = Q'(-1) = 0$. Notons ϕ_1 et ϕ_2 les formes linéaires définies par : $\forall P \in\ \mathbb{C}_n[X]$, $\phi_1(P) = P'(1)$ et $\phi_2(P) = P'(-1)$. On a : $\mathrm{Im}(f_n) \subset \ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)$; ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas proportionnelles donc $\dim(\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)) = n - 1 = \dim(\mathrm{Im}(f_n))$ d'où l'égalité . Donc :

$$\boxed{Q \in \mathrm{Im}(f_n) \Leftrightarrow Q'(1) = Q'(-1) = 0}$$

6)

- $Q(X) = f_n(P)(X) = \dfrac{X^2-1}{2} P''(X) + (-1)XP'(X) + P(X)$: $\underline{\alpha_0 = -1 \ ; \ \beta_0 = 1}$;
- $Q'(X) = \dfrac{X^2-1}{2} P'''(X)$: $\underline{\alpha_1 = \beta_1 = 0}$.
- Dérivons cette relation à l'ordre $k-1$ en utilisant la formule de Leibniz : $Q^{(k)} = \dfrac{X^2-1}{2} P^{(3+k-1)} + C_{k-1}^1 X P^{(3+k-2)} + C_{k-1}^2 P^{(3+k-3)} + \sum 0$ .Donc $\alpha_k = (k-1)$; $\beta_k = \dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$

formule qui est vrai aussi pour $k=0$ et $k=1$

$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \boxed{\alpha_k = (k-1) \ ; \ \beta_k = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)}$$

QUATRIEME PARTIE

1) On reprend $III.1$ et on écrit que les termes de plus haut degré de $f_n(S)$ et λS sont égaux :

$$\boxed{\lambda = \frac{(p-1)(p-2)}{2}}$$

2) $p \in \{0,3\} \Rightarrow \lambda = 1$; $p \in \{1,2\} \Rightarrow \lambda = 0$. On se retrouve dans $\mathbb{C}_3[X]$, d'où les polynômes propres de degré au plus 3 sont

$$\boxed{\begin{cases} P_0 = a\left(X^2+1)\right) + b \\ P_1 = a(X^3 - 3X) = bX \end{cases} , (a,b) \in \mathbb{C}^2}$$

3) $p \geq 4 \Rightarrow \dfrac{(p-1)(p-2)}{2} \geq 3 > 1$.
De plus $\lambda \neq 0$ donc $S = f_n(\dfrac{1}{\lambda}S) \Rightarrow S \in \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow S'(1) = 0$ ($III.5$) . Si on reporte dans l'équation initiale il reste $(\lambda - 1)S(1) = 0$ donc $S(1) = 0$ car $\lambda \neq 1$

$$\boxed{S(1) = S\prime(1) = 0}$$

D'après III.6 , $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{X^2-1}{2} S^{(k+2)}(X) + (k-1)XS^{(k+1)}(X) + \dfrac{(k-1)(k-2)}{2} S^{(k)}(X) = \lambda S^k(X)$, d'où pour $X = 1$: $(k-1)S^{(k+1)}(1) = \left[\lambda - \dfrac{(k-1)(k-2)}{2}\right] S^{(k)}(1)$. Si on avait $S''(1) = 0$ alors : $S^{(3)}(1) = 0$ et par récurrence : $\forall k > 1, S^{(n)}(1) = 0$, et comme on a déjà $S(1) = S'(1) = 0$ on a $\forall k \in \mathbb{N}, S^{(n)}(1) = 0$
Or d'après la formule de Taylor : $S(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg(S)} \frac{S^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n$ donc $S = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse . Donc $\boxed{S''(1) \neq 0}$.

$$\boxed{\text{1 est donc racine d'ordre 2 de } S}$$

On peut faire le même raisonnement pour -1 , donc $\underline{-1 \text{ est racine d'ordre 2 de } S}$
Si $\deg(S) = 4$ alors sachant que S est divisible par $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$, on a $\boxed{S(X) = a(X^2-1)^2, a \in \mathbb{C}}$

4) $f_n(S)(-X) = \lambda S(-X)$ d'où : $\dfrac{X^2-1}{2} S''(-X) + XS'(-X) + S(-X) = \lambda S(-X)$. Par ailleurs : $T(X) = S(-X) \Rightarrow T'(X) = -S'(-X)$ et $T''(X) = S''(-X)$ d'où : $\dfrac{X^2-1}{2} T''(X) - XT'(X) + T(X) = \lambda T(X)$ c'est à dire : $\boxed{f_n(T) = \lambda T}$.
Pour $p \geq 5$, λ est valeur propre simple donc le SEP associé est de dimension 1 , donc :$T \in \mathrm{Vect}(S)$, $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tq $T = \alpha S$.
On a en regardant le coefficient dominant des deux polynômes $\alpha = (-1)^p$ donc

$$\boxed{S(-X) = (-1)^p S(X)}$$

Si p est pair : $S(-X)=S(X)$ donc S est un polynôme pair . Si p est impair , $S(0)=-S(0)=0$
Si $p=5$, S admet 1 et -1 pour racines doubles , et 0 pour racine . $\deg(S)=5$ donc $\boxed{S(X)=aX(X^2-1)^2, a\in\mathbb{C}}$

5) On a toujours : $\dfrac{X^2-1}{2}S^{(k+2)}(X)+(k-1)XS^{(k+1)}(X)+\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}S^{(k)}(X)=\lambda S^k(X)$. Soit x_0 une racine de S , $x_0\neq\pm1$. Si $S'(x_0)$ était nul , alors pour $k=0$ et $X=x_0$ on aurait $S''(x_0)=0$; pour $k=1$: $S^{(3)}(x_0)=0$ et par récurrence : $\forall n$, $S^{(n)}(x_0)=0$ d'où $S=\widetilde{0}$ ce qui est faux . Donc $S'(x_0)\neq 0$ et

$$\boxed{x_0 \text{ est racine simple de } S}$$