ENSAIT

Ecole Nationale Supérieure
des Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A - 2003

EPREUVE de MATHEMATIQUE 2

Durée 2 heures

(tous les candidats)

L'usage de la calculatrice est interdit

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 3.
On notera 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ on notera $\mathcal{B}_n$ la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \cdots X^n)$
Dans tout le problème on considère l'application f_n qui à tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme

$$f_n(P) = \frac{X^2 - 1}{2}P" - XP' + P$$

PRELIMINAIRE

Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

PREMIERE PARTIE

étude si $n = 3$

Dans toute cette partie on étudie le cas particulier $n = 3$

1. Ecrire la matrice M_3 de f_3 dans la base $\mathcal{B}_3$.
2. Déterminer une base du noyau de f_3 puis une base de l'image de f_3.

   Ces deux sous espaces vectoriels sont-ils supplémentaires?
3. Montrer que f_3 est un projecteur.

   f_3 est -il un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}_3[X]$?

DEUXIEME PARTIE

étude si $n = 4$

Dans toute cette partie on étudie le cas particulier $n = 4$.

1. Ecrire la matrice M_4 de f_4 dans la base $\mathcal{B}_4$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f_4.

   f_4 est-il diagonalisable ?
3. Montrer qu'il existe deux matrices A et B vérifiant:

$$\begin{cases} M_4 = A + B \\ A^2 = A \\ B^2 = 3B \\ AB = BA = 0_4 \end{cases}$$

   Déterminer le rang de A et le rang de B.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, la matrice M_4^n est combinaison linéaire de A et B et déterminer les scalaires α_n et β_n tels que $M^n = \alpha_n A + \beta_n B$

TROISIEME PARTIE

étude de f_n pour $n \geq 5$

1. Montrer que si P est élément du noyau de f_n alors $d^\circ(P) \leq 2$. En déduire le noyau de f_n.
2. Montrer que $(f_n(1), f_n(X^3), f_n(X^4), \cdots f_n(X^n))$ constitue une base de l'image de f_n.
3. Déterminer les valeurs propres de f_n. f_n est-il diagonalisable ?

4. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux applications linéaires de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose ϕ_1 et ϕ_2 non nulles et non proportionnelles.

   Montrer $\dim(\ker(\phi_1)) = \dim(\ker(\phi_2)) = n$

   Montrer que $\dim(\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)) = n-1$

5. Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$

   - Montrer que si $Q = f_n(P)$ alors :
   $$Q' = \frac{X^2-1}{2} P^{(3)}$$
   - Montrer :
   $$Q \in \mathrm{Im}(f_n) \Leftrightarrow \Big(Q'(1) = Q'(-1) = 0 \Big)$$

6. Soit $Q = f_n(P)$ un polynôme de $\mathrm{Im}(f_n)$.

   Déterminer deux suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers tels que pour tout entier $k \geq 0$:
   $$Q^{(k)} = \frac{X^2-1}{2} P^{(k+2)} + \alpha_k X P^{(k+1)} + \beta_k P^{(k)}$$

QUATRIEME PARTIE

étude des racines des polynômes propres.

Dans toute cette partie λ est une valeur propre de f_n et S est un polynôme de degré $p \geq 0$ vérifiant $f_n(S) = \lambda S$

1. Exprimer λ en fonction de p .

2. On suppose dans cette question $p \leq 3$.

   - Montrer que λ est égal à 0 ou à 1 .
   - Déterminer alors tous les polynômes vérifiant $f_n(S) = \lambda S$.

3. On suppose désormais $p \geq 4$

   - Montrer que $\lambda > 1$
   - Montrer que $S(1) = S'(1) = 0$
   - On suppose $S"(1) = 0$ montrer $\forall k \geq 3$ $S^{(k)}(1) = 0$
   - Montrer que 1 est racine double de S.
   - Montrer que -1 est racine double de S
   - Calculer S si $p = 4$

4. On suppose désormais $p \geq 5$ et on considère le polynôme $T = S(-X)$.

   - Exprimer $f_n(T)$ en fonction de T.
   - En déduire que si p est un entier pair alors S est un polynôme pair.
   - Montrer que si p est un entier impair alors 0 est racine de S.
   - Calculer S si $p = 5$.

5. Montrer que si x_0 est une racine de S autre que -1 ou 1 alors x_0 est racine simple de S.