Concours marocain 2006 PSI math 2

EXERCICE

1. Par définition de l'isomorphisme entre matrice et application linéaire on a: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^3+u) = A^3 + A = 0$, donc $u^3 + u = 0$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A \neq 0$, donc $u \neq 0$.

2.

a) Par l'absurde : Si u ést injectif alors u est bijective (dimension finie) , donc si $u^3 + u = 0$ alors en composant par u^{-1}, $u^2 + Id = 0$, . Ainsi $A^2 = -I_3$, et donc $\det(A^2) = \det(-I_3)$, d'où $\det(A)^2 = -1$ ce qui est impossible, donc u n'est pas injective.

b) $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \leq 3$. D'après la question précédente u est injective, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \neq 0$ et comme $u \neq 0$ $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \neq 3$, d'où

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}}$$

3.

- la somme est directe:
  soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + Id)$ on a donc $u(x) = 0$ et $x = -u^2(x)$ et donc $x = -u(0) = 0$, donc $\underline{\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + Id) = \{0\}}$

- elle est égale à E :
  Soit $x \in E$ on montre $x \in \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + Id)$
  - analyse : si $x = k + v$ avec $u(k) = \overrightarrow{0}$ et $u^2(v) = -v$ on a: $u(x) = u(v)$ et $u^2(v) = u^2(x)$ donc $v = -u^2(x)$ et $k = x + u^2(x)$
  - vérification : si $k = x + u^2(x)$ et $v = -u^2(x)$ on a bien : $x = k + v$, $u(k) = (u + u^3)(x) = \overrightarrow{0}$ et $u^2(v) = -u^4(x) = -u\left(u^3(x)\right) = v$ (en utilisant deux fois $u^3 + u = 0$)
- donc $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + Id)$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + Id)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$, car $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + Id)) \in \{1, 2\}}$$

4.

a)Soit $x \in F = \mathrm{Ker}(u^2 + Id)$, on montre que $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id)$: on a $u^2(x) + x = 0$, donc en composant par u : $u^3(x) + u(x) = u(0) = 0$, donc $(u^2 + Id)(u(x)) = 0$, d'où

$$\boxed{F \text{ est stable par } F.}$$

On peut aussi vérifier que u et $u^2 + Id$ commutent et dire que le noyau de l'un est stable par l'autre.

b)si x est élément de F on a par définition de F : $u^2(x) = -x$ et donc $v^2(x) = -x \Longrightarrow v^2 = -Id_F$.

c)$\det(v^2) = \det(-Id_F) = (-1)^{\dim(F)}$, or $\det(v^2) = \det(v)^2 \geq 0$, et $\dim(F) \in \{2, 3\}$, d'où $\boxed{\dim(F) = 2}$.

d)Soit λ une valeur propre réelle de v, et x un vecteur propre associé, alors $v(x) = \lambda x$ et donc $v^2(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$, or $v^2 = -Id$ d'où comme $x \neq \overrightarrow{0}$: $\lambda^2 = -1$, impossible dans $\mathbb{R}$.

5.

a)Par stabilité de F e'_3 est aussi dans F .

Soit λ, μ réels tels que $\lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0$, on compose par u, d'où $\lambda e'_3 - \mu e'_2 = 0$, car $u(e'_2) = e'_3$ et $u(e'_3) = u^2(e'_2) = v^2(e'_2) = -e'_2$,On obtient alors le système:

$$\begin{cases} \lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0 \\ -\mu e'_2 + \lambda e'_3 = 0 \end{cases}$$

On élimine e'_3 : $\left(\lambda^2 + \mu^2\right) e'_2 = \overrightarrow{0}$. e'_2 étant non nul $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, et comme on a des réels $\lambda = \mu = 0$

b)Comme $Card(\mathcal{B}') = \dim(E) = 3$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre:

soit α, β, γ des réels tels que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$, si on compose par u, on obtient : $\beta e'_3 - \gamma e'_2 = 0$ car $u(e'_1) = 0, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = -e'_2$, or la famille (e'_2, e'_3) est libre, donc $\beta = \gamma = 0$ et par suite $a e'_1 = 0$, d'où comme $e'_1 \neq 0$ $a = 0$, donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base}}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par définition <u>A et B sont semblables</u>

$$\boxed{\text{toute matrice } 3\times 3 \text{ non nulle vérifiant } A^3+A=0 \text{ est semblable à} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

PROBLEME

Première partie.

1.

a)On décompose A dans la base canonique $A=\displaystyle\sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} a_{k,l}E_{k,l}$ donc:

$$AE_{i,j}=\sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}$$

or si $l\neq i$ on a $E_{k,l}E_{i,j}=0$ et si $i=l$ $E_{k,l}E_{i,j}=E_{k,j}$

$$\boxed{AE_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}}$$

de même

$$E_{i,j}A=\sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} a_{k,l}\delta_{k,j}E_{i,l}=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}$$

$$\boxed{E_{i,j}A=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}}$$

On a : $AE_{i,j}$ est une matrice ayant toutes ses colonnes nulles sauf la colonne j qui est égal à la colonne i de A.

On a : $E_{i,j}A$ est une matrice ayant toutes ses lignes nulles sauf la ligne i qui est égal à la ligne j de A

b)

$$AM=MA\Longrightarrow AM-MA=0\Longrightarrow\forall(i,j)\in[[1,n]]^2\ AE_{i,j}=E_{i,j}A$$

donc d'après le calcul précédent

$$AM=MA\Longrightarrow\forall(i,j)\in[[1,n]]^2\ \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}$$

or on a la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc si $k=i$ et $l=j$ la coordonnée sur $E_{i,j}$ est la même donc $a_{i,j}=a_{j,j}$. Dans tous les autres cas $(k,i)\neq(i,l)$ et donc $a_{k,i}=0$ et $a_{j,l}=0$

Donc les $a_{i,i}$ sont tous égaux et les autres termes sont tous nuls. D'où $M=\lambda I_n$.

Réciproquement si $M=\lambda I_n$ on vérifie sans problème que pour toute matrice A la relation $AM=MA$ estr vraie.

Remarque : on peut aussi "dessiner" des matrices pour voir les coefficients associés:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & \cdots & j & \cdots & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{i,i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & \cdots & 0 & a_{n,i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{j,1} & & & a_{j,j} & & & a_{j,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array}$$

2.

a)La trace est linéaire et $Tr(E_{k,j}) = \delta_{k,j}$ donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}\right) = a_{j,i}$.

$$\boxed{Tr(AE_{i,j}) = a_{j,i}}$$

b)$Tr(AM) = 0 \Longrightarrow \forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2 : Tr(AE_{i,j}) = 0$ donc : $\forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2 : a_{j,i} = 0$

$$\boxed{(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Tr(AM) = 0) \Longrightarrow A = 0}$$

la réciproque est évidente.

3. Question de cours : Si on pose $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), AB = (c_{i,j}), BA = (d_{i,j})$, on a:$\forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2$ $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ et on a aussi: $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}$, en échangeant les indices i et k, on a bien que: $Tr(AB) = Tr(BA)$.

4. Le produit par une matrice inversible conserve le rang et la transposition conserve le rang , donc $rg(PMQ) = rg(M)$ et $rg(P^tMQ) = rg(^tM) = rg(M)$

5. $\det(PMQ) = \det(P)\det(M)\det(Q)$, donc $u_{P,Q}$ conserve le déterminant si et seulement si $\det(P)\det(Q) = 1$. De même pour $v_{P,Q}$, puisque $\det(^tM) = \det(M)$.

Deuxième partie.

1. Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est de la forme :

$$\varkappa(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}tr(M) + \sum_{i=2}^{n-2}\alpha_i\lambda^i + \det(M)$$

donc en identifiant les coefficients de λ^{n-1} et λ^0 : si M et $\Phi(M)$ ont le même polynôme caractéristique

ils ont même déterminant et même trace.

2. C'est une conséquence de la propriété admise au début de la 2ème partie.

3. Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$

a)Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\,(PE_{i,j}Q) = Tr\,(\Phi(E_{i,j})) = Tr(E_{i,j})$ car Φ conserve la trace.
Si $\Phi = v_{P,Q}$, alors $Tr\,(PE_{i,j}Q) = Tr\,\left(\Phi(^tE_{i,j})\right) = Tr(^tE_{i,j}) = Tr(E_{i,j})$.

$$\boxed{Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(E_{i,j})}$$

b)On a $Tr(AB) = Tr(BA)$ donc $\forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2 : Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(QPE_{i,j})$ donc d'après la question précédente $\forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2 : Tr\,((I_n - PQ)\,E_{i,j}) = 0$ Le calcul fait au I.2.b) donne $PQ - I_n = 0$, d'où $\boxed{Q = P^{-1}}$.

4. D'après tout ce qui précède on conclut que les endomorphismes qui conservent le polynôme caractéristique sont de la forme $u_{P,P^{-1}}$ ou $v_{P,P^{-1}}$

Réciproquement si $\Phi(M) = PMP^{-1}$, $\det(PMP^{-1} - \lambda In) = \det\left(P\left\{M - \lambda I_n\right\}P^{-1}\right) = \det(P)\det\left(M - \lambda I_n\right)\det(P^{-1}) = \det(P - \lambda I_n)$ et de même si $\Phi(M) = P^tMP^{-1}$ car $\det\left(^tM - \lambda I_n\right) = \det(M - \lambda I_n)$ en transposant.

$$\boxed{\text{un endomorphisme conserve le déterminant ssi il est du type } u_{P,P^{-1}} \text{ ou } v_{P,P^{-1}}}$$

5.

a) Φ est linéaire (vérification immédiate) , d'autre part soit:
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a:

$$\Phi(M) = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

d'où si $M \in \operatorname{Ker}(\Phi)$ on a $a = b = c = d = 0$. Φ est injective comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension fini, alors

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme}}$$

b)On cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non nulle et λ réel telle que :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ on a $\lambda = -1$. Puis si $\lambda = -1$ le système équivaut à $a + d = 0$. -1 est valeur propre et le sous espace propre associé est l'hyperplan d'équation $a + d = 0$. Il est donc de dimension 3.
- si $\lambda \neq -1$ on a $b = c = 0$ et $d = \lambda a, a = \lambda d$ donc $d = \lambda^2 a$, si $\lambda = 1$ on a Vect $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $\lambda \neq 1$, $a = 0$ donc $d = 0$ absurde.
- La somme des dimensions des sous espaces propres est $3 + 1 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

$$\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable}}$$

c)soit: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donc $\Phi(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, il est clair que ces deux matrices ont même polynôme caractéristique : $ad - bc$

d) on cherche $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que $\forall M$, $\Phi(M) = P^t M P^{-1}$ qui équivaut à $\forall M$ $\phi(M)P = P^t M$ Soit :

$$\forall(a, b, c, d) \begin{pmatrix} \alpha d - \gamma b & \beta d - \delta b \\ -\alpha c + \gamma a & -bc + \delta a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \\ \gamma a + \delta b & \gamma c + \delta d \end{pmatrix}$$

Les coefficients doivent être égaux :si $a = 1, b = c = d = 0$ on a : $\alpha = \delta = 0$, si $b = 1, a = c = d = 0$ on a $\delta = 0$ et $\gamma = -\beta$ ...
$P = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, inversible pour $\beta \neq 0$, et on vérifie alors que P est solution.

$$\boxed{\text{une solution est } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Troisième partie.

Attention ici Φ n'est pas supposée être linéaire.

1.

a)On a$\Phi(A)\Phi(B)$ et AB ont même polynôme carctéristique donc, comme à la question II.1, $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB ont même trace, en particulier

$$\forall\,(i, j) \in [[1, n]]\ ^2,\ Tr(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l})) = Tr(E_{i,j}E_{k,l}) = Tr(\delta_{j,k}E_{i,l}) = \delta_{j,k}Tr(E_{i,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}.$$

la trace est nulle sauf si $j = k$ et $i = l$.

b)On a $Card\,(\Phi(E_{i,j})) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre. En effet soit $(\lambda_{i,j})$ des nombres complexes tels que $\sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]} \lambda_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$, on a donc pour tout (k, l) : $Tr\left(\sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]} \lambda_{i,j}\Phi(E_{i,j}).\varphi\right.$ 0. Donc d'après la linéarité de la trace et la relation précédente : $\sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]} \lambda_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,l} = 0$. Dans la $\sum$ tous les termes sont nuls sauf celui pour $i = l, j = k$ il reste donc : $\forall\,(k, l) \in [[1, n]]^2$: $\lambda_{l,k} = 0$ d'où

$$\boxed{\text{la famille } (\phi(E_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2} \text{ est libre}}$$

2.

a) pour toutes matrices A, B et tous indices i, j on a par linéarité de la trace et en utilisant le calcul précédent :

$$\begin{aligned} Tr\left((\Phi(A+B)-\Phi(A)-\Phi(B))\Phi(E_{i,j})\right) &= Tr\left(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j})-\Phi(A)\Phi(E_{i,j})-\Phi(B)\Phi(E_{i,j})\right) \\ &= Tr\left(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j})\right)-Tr\left(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})\right)-Tr\left(\Phi(B)\Phi(E_{i,j})\right) \\ &= Tr\left((A+B)E_{i,j}\right)-Tr\left(AE_{i,j}\right)-Tr\left(BE_{i,j}\right)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)Comme la trace est linéaire $M->Tr\left((\Phi(A+B)-\Phi(A)-\Phi(B))M\right)$ est aussi linéaire de plus

$$Tr\left((\Phi(A+B)-\Phi(A)-\Phi(B))M\right)=0$$

est vérifié pour toute matrice de la base $(\phi(E_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$, donc la relation est vérifiée pour toute les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question I.2.b) , on conclut que $\Phi(A+B)-\Phi(A)-\Phi(B)=0$.

$$\boxed{\forall\,(A,B)\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)^2, \Phi(A+B)=\Phi(A)+\Phi(B)}$$

3. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$, on montre comme dans la question précédente que: $Tr\left((\Phi(\lambda A)-\lambda\Phi(A))\Phi(E_{i,j})\right)=0$, puis on en déduit que $\forall M$, $Tr\left((\Phi(\lambda A)-\lambda\Phi(A))M)\right)=0$ et donc que: $\Phi(\lambda A)-\lambda\Phi(A)$, d'où Φ est linéaire

   Soit alors $A\in$ Ker (Φ), donc $\forall\,(i,j)\in[[1,n]]^{\,2}, Tr(AE_{i,j})=Tr(\Phi(A)\Phi(E_{i,j}))=0$,et toujours avec la question I.2 $A=0$. Φ est injective,de plus c'est un endomorphisme en dimension finie, alors

$$\boxed{\Phi \text{ est un un automorphisme}}$$

4. $E_{i,j}^2=E_{i,j}E_{i,j}=\delta_{i,j}\delta_{j,i}=0$ car $i\neq j$, donc *le* polynôme carctéristique de $E_{i,j}^2$ est $(-\lambda)^n$. donc celui de $\Phi\left(E_{i,j}\right)^2$ est aussi $(-\lambda)^n$ d'après l'hypothèse sur Φ .

   Le polynôme caractéristique est scindé donc $\Phi\left(E_{i,j}\right)^2$ est trigonalisable , et la matrice triangulaire T semblable à $\Phi\left(E_{i,j}\right)^2$ n'a que des zéros sur la diagonale (la seule valeur propre).

$$\text{On a } T=\begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } T^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & t'_{1,3} & \cdots & t'_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t'_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots$$

   - Si pour T on a $\forall j\leq i$, $t_{i,j}=0$ alors si $T^2=(t'_{i,j})$: $t'_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}t_{i,k}t_{k,j}=\sum_{k=i+1}^{n}t_{i,k}t_{k,j}$ car pour $k\leq i$ $t_{k,i}=0$. Donc si $j\leq i+1$ on a pour tout k $t_{k,j}=0$ et donc $t'_{i,j}=0$
   - Par récurrence sur p si on suppose $T^p=(\tau_{i,j})$ avec $\tau_{i,j}=0$ si $j\leq i+p-1$ on a $T^{p+1}=\left(\tau'_{i,j}\right)$ avec $\tau'_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}t_{i,k}\tau_{k,j}=\sum_{k=i+1}^{n}t_{i,k}t_{k,j}=0$ si $j\leq i+p$
   - On a donc $T^n=0$ et donc $\Phi(E_{i,j})^{2n}=0$

$$\boxed{\forall i\neq j \text{ , } \phi\left(E_{i,j}\right) \text{ est nilpotente}}$$

5. G existe (et est unique) car Φ est bijective vérifiant $\Phi(G)=I_n$

   a)D'après l'hypothèse de la partie III, AG et $\Phi(A)\Phi(G)=\Phi(A)$ ont même polynôme caractéristique..

   b)D'après le calcul du I1a on a $E_{i,j}G$ est une matrice ayant toutes ses lignes nulles sauf la ligne i qui est égal à la ligne j de G, d'où $\underline{\det(G-\lambda I_n)=(-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda-g_{j,i})}$.(écrire la matrice)

   c)Pour $i\neq j$, la matrice $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente, donc son polynôme caractéristique est $(-\lambda)^n$. Les deux polynômes caractéristiques sont égaux donc $g_{j,i}=0$, d'où $\underline{G \text{ est diagonale}}$.

   D'autre part, G^2 et $\Phi(G)=I_n$ ont même polynôme caractéristique d'après 5.a) avec $A=G$ or G est diagonale donc $G^2=diag(g_{1,1}^2,\ldots,g_{n,n}^2)$ et l'égalité des polynômes caractéristiques donnent $(-1)^n(\lambda-1)^n=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(\lambda-g_{i,i}^2)$, d'où $g_{i,i}^2=1$ et par suite $\boxed{G^2=I_n}$.

6.

a)Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de $\psi(A)$ est celui de $\Phi(AG)$ définition de ψ . c'est donc celui de AG^2 (III.5.a) donc celui de A (car $G^2 = I_n$) Donc $\underline{\Psi \text{ conserve le polynôme caractéristique.}}$

b)Ψ conserve le polynôme caractéristique,donc d'après la 2ème partie $\exists P$ inversible telle que $\Psi = u_{P,P^{-1}}$ ou $\Psi = v_{P,P^{-1}}$,

Or $\psi(A) = \Phi(AG)$ donc si $A = MG$ on a : $\psi(MG) = \Phi(MG^2) = \Phi(M)$ (toujours $G^2 = I_n$)

donc $\Phi(M) = \Psi(MG) = u_{P,P^{-1}}(MG) = PMGP^{-1}$ ou $\Phi(M) = \Psi(MG) = v_{P,P^{-1}}(MG) = P^t\,(MG)\,P^{-1}$. Or G est diagonale donc ${}^tG = G$ et donc ${}^t(MG) = {}^tG^tM = G^tM$

$$\boxed{\text{il existe } P \text{ inversible tel que } \Phi(M) = PMGP^{-1} \text{ ou } PG^tMP^{-1}}$$

7.

a) $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB ont la même trace (ils ont même polynôme caractéristique) or $\Phi(A)\Phi(B) = PAGP^{-1}PBGP^{-1} = PAGBGP^{-1}$ ou $\Phi(A)\Phi(B) = PG^tAP^{-1}PG^tBP^{-1}$.

Or deux matrices semblables ont même trace donc

- dans le premier cas
$$Tr(AB) = Tr(PAGBGP^{-1}) = Tr(AGBG)$$
- dans le second cas
$$Tr(AB) = Tr(PG^tAG^tBP^{-1}) = Tr(G^tAG^tB) = Tr(B^tGA^tG)$$
car la transposition conserve la trace et ${}^tG = G$ donc
$$Tr(AB) = Tr(BGAG) = Tr((BG)(AG)) = Tr((AG)(BG)) = Tr(AGBG)$$
- dans les deux cas :
$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \ , Tr(AGBG) = Tr(AB)}$$

danger : :on ne peut pas commuter et dire comme $Tr(PQ) = Tr(QP)$ alors $Tr(AGBG) = Tr(ABG^2) = Tr(AB)$ car il n'est pas possible de choisir P et Q pour regrouper les deux facteurs G.

contre exemple : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $tr(AB) = ae + bg + cf + dh$ et $Tr(AGBG) = ae - bg - cf + dh$

b)D'après la question précédente on a : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Tr\left((GBG - B)A\right) = 0$, d'après la question I.2.b) on en déduit $GBG - B = 0$.

c)pour toute matrice B on a $GBG = B$ donc $GB = BG^{-1} = BG$ (car $G^2 = I_n$) .G commutent avec toutes les matrices donc d'après I.1.b) il existe λ tel que $G = \lambda\, I_n$, or $G^2 = I_n$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\exists \varepsilon \in \{-1, 1\} \ , G = \varepsilon I_n}$$

8. On a donc d'après 6.b $\Phi(M) = \varepsilon PMP^{-1}$ ou εP^tMP^{-1}. c'est à dire $\Phi = \varepsilon u_{p,p^{-1}}$ ou $\varepsilon v_{PP^{-1}}$

   Réciproquement si $w = \varepsilon u_{P,P^{-1}}$, on a: $\chi_{w(A)w(B)} = \chi_{\varepsilon PAP^{-1}\varepsilon PBP^{-1}} = \chi_{PABP^{-1}} = \chi_{AB}$ car deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
   Le même raisonnement est encore valable pour le cas où $w = \varepsilon v_{P,P^{-1}}$.