Corrigé du III

1.a/ par l'absurde si λ est valeur propre et si $\vec{x}$ est vecteur propre on a $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\varphi(x) = \lambda x$, donc

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \varphi^p(x) = \lambda^p x$,

si on suppose $|\lambda| > 1 \quad \|\varphi^p(x)\| = |\lambda|^p \, \|x\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty \quad \{\|x\| \neq 0\}$

donc $\{\varphi^p(x)\}$ n'est pas borné : abs par définition

1.b/ d'après a) φ ne doit pas être diagonalisable.

si $\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

si $T = \mathrm{Mat}_{ij}(\varphi) \quad \varphi^n(j) = n\lambda^{n-1} i + \lambda^n j$

donc $\|n\lambda^{n-1} i + \lambda^n j\| \geq \|n\lambda^{n-1} i\| - \|\lambda^n j\| = n|\lambda|^{n-1} i - |\lambda|^n j$

si on prend $\lambda = 1 \quad \|\varphi^n(j)\| \longrightarrow +\infty$; non borné

1.c/ si φ est diagonalisable soit $(V_i)_{i=1}^n$ une base de vecteurs propres

et λ_i tel que $\varphi(V_i) = \lambda_i V_i$

alors tout $x \in E$ se décompose $x = \sum_{i=1}^n x_i V_i$

on a $\forall p \in \mathbb{N} \quad \varphi^p(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi^p(V_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^p V_i$

donc $\|\varphi^p(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, |\lambda_i|^p \, \|V_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|V_i\|$ si $\forall i \ |\lambda_i| \leq 1$

$M = \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|V_i\|$ est un majorant indépendant de $p \Rightarrow$ borné

2.a/ $\varphi(x) = y + \lambda x$ par définition de y

~~$\varphi^2(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(x)$ mais $\varphi(y) = \varphi^2(x) - \lambda\varphi(x)$~~

On a posé $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2(x) = \vec{0} \Leftrightarrow \varphi^2(x) - 2\lambda\varphi(x) + \lambda^2 x = 0$

donc $\varphi^2(x) = 2\lambda\varphi(x) - \lambda^2 x = 2\lambda y + \lambda^2 x$.

on suppose par récurrence : H_p : $\varphi^p(x) = p\lambda^{p-1} y + \lambda^p x$

> vrai si $p = 1$ et 2

∨ si $p = 0 \quad x = x$: OK car $\lambda \neq 0$.

~~pas de sens si λ -~~

si H_p est vrai $\varphi^p(x) = p\lambda^{p-1}y + \lambda^p x$.

donc $\varphi^{p+1}(x) = p\lambda^{p-1}\varphi(y) + \lambda^p\varphi(x)$

$= p\lambda^{p-1}(\varphi^2(x) - \lambda\varphi(x)) + \lambda^p\varphi(x)$

$= p\lambda^{p-1}(\underbrace{2\lambda\varphi(x) - \lambda^2 x}_{} - \lambda\varphi(x)) + \lambda^p\varphi(x)$

$= p\lambda^p\varphi(x) - p\lambda^{p+1}x + \lambda^p\varphi(x)$

$= (p+1)\lambda^p\varphi(x) - p\lambda^{p+1}x$

$= (p+1)\lambda^p(y + \lambda x) - p\lambda^{p+1}x$

$= (p+1)\lambda^p y + \lambda^{p+1}x$

par recurrence $\forall p \in \mathbb{N}$ φ^p ~~$(x) = \varphi(\lambda^{p-1}y + \lambda$~~

$\varphi^p(x) = p\lambda^{p-1}y + \lambda^p x$

b) si $y \neq \vec{0}$ $\|\varphi^p(x)\| \geq p|\lambda|^{p-1}\|y\| - |\lambda|^p\|x\| = p\|y\| - \|x\|$ car $|\lambda| = 1$

donc $\|\varphi^p(x)\| \geq p\|y\| - \|x\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$: absurde φ est bornée

donc $y = \vec{0}$ donc $\varphi(x) = \lambda x$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id})$

c) par theoreme de rang les dimensions sont les bonnes

intersection soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$

on a donc $\varphi(x) - x = \vec{0}$ et $\exists t$ $(\varphi - \mathrm{Id})(t) = x$

on a donc $(\varphi - \mathrm{Id})^2(t) = (\varphi - \mathrm{Id})(x) = \vec{0}$

$t \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})^2$ donc d'apres la ~~relation~~ question precedente $t \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$

et donc $x = (\varphi - \mathrm{Id})(t) = \vec{0}$ $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathbb{C}^n}$

3) on montre que φ est borné en utilisant 1.c. le resultat decoule de 2.c

$\det(\varphi - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} p-\lambda & q & r \\ q & p-\lambda & r \\ q & r & p-\lambda \end{vmatrix}$ si on ajoute les 3 colonnes $p+q+r = 1$ est vp

$L_2 - L_1$ donne sa valeur propre $p-q$.

$L_3 - L_2$ ——— $p-r$

on verifie $(p+q+r) + (p-q) + (p-r) = 3p = \mathrm{Tr}(\varphi)$

on a $p-q < p < 1$ $p-r < p < 1$.

si $q \neq r$ $(p-q, p-r, 1)$ sont 3 valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ diagonalisable