1.

(1a) Une équation du cercle de centre (8,0) et de rayon 8 est : $(x-8)^2+y^2=8^2$ soit $x^2+y^2-16x=0$

(1b) Si $x=2$ on a donc $y^2-28=0$ soit $y=\pm\sqrt{28}$

(1c)

- Les coordonnées (x,y) de $P(t)$ vérifient : $\left\{\begin{array}{c} x=2 \\ y=tx \end{array}\right.$ on a donc $P(t)=(2,2t)$
- les coordonnées (x,y) de $Q(t)$ vérifient : $\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2-16x=0 \\ y=tx \end{array}\right.$. ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{c} x^2+t^2x^2-16x=0 \\ y=tx \end{array}\right.$

Si $x=0$ alors $y=0$ (non car $Q(t)\neq O$)

Si $x\neq 0$ on a $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{16}{1+t^2} \\ y=\frac{16t}{1+t^2} \end{array}\right.$

(1d)

- Les coordonnées du milieu d'un segment sont obtenues en faisant la moyenne des coordonnées des extrémités :

$$\begin{pmatrix} \frac{t^2+9}{1+t^2} \\ \frac{t\left(t^2+9\right)}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

  quelle surprise : C'est la courbe étudiée à la question 2:
- Les points P et Q étant sur la droite D_t le milieu est aussi sur la droite D_t . Le milieu est donc en A si D_t passe par A donc si $t=\frac{y_A}{x_A}=\sqrt{7}$.On vérifie alors que cette valeur de t est la bonne
  - soit géométriquement on a alors $P=Q=A$ donc aussi le milieu en A.
  - soit analytiquement : si $t=\sqrt{7}$ alors $x=\frac{7+9}{1+7}=2$ et $y=\frac{\sqrt{7}(7+9)}{1+7}=2\sqrt{7}=\sqrt{28}$
- De même le milieu est en B si $t=-\sqrt{7}$

2.

(2a) on a $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$. la courbe est symétrique par rapport à $x'Ox$.

<u>On fait donc une étude sur $\mathbb{R}^+$</u>

(2b) La limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle est obtenue en faisant le quotient des termes de plus haut degré : $\lim_{+\infty}(x)=1$, $\lim_{+\infty}(y)=+\infty$.

<u>La courbe présente une asymptote verticale $x=1$</u>

(2c) les deux fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}^+$

- $$x'(t)=\frac{2t(t^2+1)-2t\left(t^2+9\right)}{\left(t^2+9\right)^2}=\frac{-16t}{\left(t^2+9\right)^2}$$
- En posant $y=\frac{t^3+9t}{t^2+1}$ on a
$$y'(t)=\frac{\left(3t^2+9\right)\left(t^2+1\right)-2t\left(t^3+9t\right)}{\left(t^2+9\right)^2}=\frac{t^4-6t^2+9}{\left(t^2+9\right)^2}$$
- Pour avoir une tangente horizontale il suffit que $y'=0$ (et $x'\neq 0$ pour que le point soit régulier). $y'=0$ peut se résoudre en posant $T=t^2$. l'équation $T^2-6T+9=0$ admet une racine double $T=3$, donc $y'(t)=0 \iff t=\pm\sqrt{3}$. ce qui donne les points $\left(3,3\sqrt{3}\right)$ et $\left(3,-3\sqrt{3}\right)$
  Par choix du sujet $t=\sqrt{3}$ correspond à $U=\left(3,3\sqrt{3}\right)$ et $t=-\sqrt{3}$ à $V=\left(3,-3\sqrt{3}\right)$
- Pour avoir une tangente verticale il suffit que $x'=0$ (et $y'\neq 0$ pour que le point soit régulier).le point à tangente verticale correspond à $t=0$ donc $I=(9,0)$

(2d) si t décrit $\mathbb{R}^+$, x décroît de 9 à 1 et y croît de 0 à $+\infty$ (y' ne change pas de signe en $+\sqrt{3}$)

3. voir figure

4.

(4a)

- Toute droite non verticale à une équation du type $y = mx+h$.Les points $M(t_i)$ sont alignés si et seulement si ils sont sur une même droite donc si et seulement si il existe deux réels m et h tels que pour $\forall i \in \{1,2,3\}$ $y(t_i) = mx(t_i)+h$
- Ce qui équivaut à l'existence de m et h réels tels que :

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ \frac{t_i^3+9t_i}{t_i^2+1} = m\frac{t_i^2+9}{t_i^2+1}+h$$

  l'équation est équivalente à son produit par $\left(t_i^2+1\right) \neq 0$

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ t_i^3+9t_i = m\left(t_i^2+9\right)+h(t_i^2+1)$$

  On passe le second membre à gauche pour avoir l'équation équivalente :

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ t_i^3-(m+h)\,t_i^2+9t_i-(9m+h)=0$$

(4b) On considère l'équation du 3eme degré $X^3-(m+h)\,X^2+9X-(9m+h)=0$. elle admet trois racines $\{x_i\}_{i=1}^3$. Comme son coefficient dominant est 1 on a alors :

$$X^3-(m+h)\,X^2+9X-(9m+h)=(X-x_1)\,(X-x_2)\,(X-x_3)$$

Les trois points étudiés sont alignés si et seulement il existe m et h tels que les t_i soient les racines de l'équation précédente. Donc si et seulement si il existe m et h tels que :

$$X^3-(m+h)\,X^2+9X-(9m+h)=(X-t_1)\,(X-t_2)\,(X-t_3)$$

(4c) on développe :

$$X^3-(m+h)\,X^2+9X-(9m+h)=X^3-(t_1+t_2+t_3)X^2+(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)\,X-t_1t_2t_3$$

(relations entre coefficients et racines d'un polynôme).
Les polynômes sont égaux donc aussi leurs coefficients :

- si les trois points (supposés distincts) sont alignés le coefficient de x donne $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=9$
- réciproquement si $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=9$, on doit se poser le problème de l'existence de m et h tels que

$$\begin{cases} (t_1+t_2+t_3)=m+h \\ t_1t_2t_3=9m+h \end{cases}$$

  On a donc un système linéaire de deux équation à 2 inconnues ... de Cramer (son déterminant vaut -8) il admet donc toujours une solution .
  on a donc :

$$t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=9 \Longleftrightarrow \exists\,(m,h)\in\mathbb{R}^2 : X^3-(m+h)\,X^2+9X-(9m+h)=(X-t_1)\,(X-t_2)\,(X-t_3)$$

$$\boxed{\text{trois points distincts de paramètres } t_i \text{ sont alignés sur } \Gamma \text{ si et seulement si } t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=9}$$