partie 1

I.A M est symétrique réelle donc on peut diagonaliser dans une base orthonormale $(e'_i)_{i=1}^n$. dans cette base $x = \sum_{i=1}^n y_i e'_i$,

$f_M(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i e'_i$ et on a donc : : $< f_M(x), x >= \sum_{j=1}^n \lambda_i y_i^2$.

- Si $Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$ on obtient $< f_M(x), x >\geqslant 0$: M est positive.
- Si M est positive on prend $x = e'_i$ il reste $< f_M(x), x >= \lambda_i$ et donc $\lambda_i \geq 0$
- Si $Sp(M) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ on obtient $< f_M(x), x >> 0$ pour $x \neq 0$: M est définie positive.
- Si M est définie positive on prend $x = e'_i$ il reste $< f_M(x), x >= \lambda_i$ et donc $\lambda_i > 0$

I.B

a) On développe la formule qui donne F : $F(v) = \frac{1}{2}(13x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_2) - 75x_1 + 75x_2$ .On a un polynôme donc de classe C^∞.

b) $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 13x_1 - 4x_2 - 75$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 7x_2 - 4x_1 + 75$; on a donc bien $\operatorname{grad} F(v) = Av - b$.

c) $\det(A) = 75 \neq 0$ donc A est inversible il existe un unique point critique.

: l'unique point critique est $v_0 = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

d) On peut réduire F :

* On fait une translation pour mettre l'origine en v_0 en posant : $x_1 = 3 + x'_1$, $x_2 = -9 + x'_2$. On a alors

$$F(v) = \frac{1}{2}(13x_1'^2 + 7x_2'^2 - 8x'_1x'_2) - 450$$

* On a alors $13x_1'^2 + 7x_2'^2 - 8x'_1x'_2 = {}^t\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On diagonalise A dans une base orthonormale : $Sp(A) = \{5, 15\}$, $E_5 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_{15} = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On prend donc $I = \frac{i + 2j}{\sqrt{5}}$, $J = \frac{-2i + J}{\sqrt{5}}$. Dans le repère (v_0, I, J) on a :

$$\boxed{F(v) = \frac{1}{2}\left(5X^2 + 15Y^2\right) - 450}$$

* la surface Σ a l'équation réduite dans (v_0, I, J, k) : $z = 5X^2 + 15Y^2 - 450$
  - L'intersection par un plan $z = Cste$ est une ellipse si $z < 450$, vide si $z < -450$
  - L'intersection par un plan $X = Cste$ ou $Y = Cste$ est une parabole.
* On peut donc dire que : la surface est un paraboloïde elliptique. (mais le nom n'est pas au programme)

Remarque : j'ai traité un peu plus que la question : une fois remarqué que $Sp(A) \in \mathbb{R}^{+*}$ le calcul explicite des valeurs propres et des vecteurs est inutile la forme $F(v) = \lambda X^2 + \mu Y^2 - 450$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ suffit.

e) La forme réduite donne directement $F(v) \geq -450 = F(v_0)$ donc le résultat.

On peut repartir de $F(v) = \frac{1}{2}(13x_1'^2 + 7x_2'^2 - 8x'_1x'_2) - 450$ et vérifier que $Q(v) = 3x_1'^2 + 7x_2'^2 - 8x'_1x'_2 \geq 0$ car son discriminant (en x'_1) vaut $-20x_2'^2 \leq 0$

$$\boxed{F \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}^2 : -450}$$

I.C Danger : contrairement à l'exemple l'opérateur ∇ n'est plus défini par le gradient.

1) Puisque A est symétrique: $< Av, h >= {}^t(Av)h = {}^tv^tAh = {}^tv\,(Ah) = (v, Ah) =< Ah, v >$.

2) a)

$$\begin{aligned} R(h) &= J(v + h) - J(v) - < Av - b, h > \\ &= \frac{1}{2}\left(< Av + Ah, v + h > - < Av, v >\right) - < b, v + h > + < b, v > - < Av - b, h > \\ &= \frac{1}{2}(< Av, h > + < Ah, v > + < Ah, h >) - < Av, h > \\ &= \frac{1}{2} < Ah, h > \text{ car } < Av, h >=< Ah, v > \end{aligned}$$

Or A est positive, donc (définition) $R(h) \geq 0$

b)

$$J(v_0+th)=J(v_0)+\langle\nabla J(v),th\rangle+R(th)$$

mais $R(th)=t^2R(h)$ et donc :

$$J(v_0+th)-J(v_0)=t<\nabla J(v_0),h>+t^2R(h)\geqslant 0$$

* si $R(h)=0$ on a $\forall t\in\mathbb{R}: t<\nabla J(v_0),h>\geqslant 0$ et donc $<\nabla J(v_0),h>$
* si $R(h)\neq 0$ on a un trinôme du second degré toujours positif donc $\Delta=<\nabla J(v_0),h>^2\leq 0$ et donc $<\nabla J(v_0),h>=0$
* $\forall h$, $<\nabla J(v_0),h>=0$ donc $\nabla J(v_0)$ est orthogonal à tout vecteur donc est nul.

$$\boxed{J(v_0)=\min\left(J(v),v\in\mathbb{R}^n\right)\Longrightarrow\nabla J(v_0)=0}$$

3) a) A est définie positive, donc $Sp(A)\subset\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$ le déterminant (produit des valeurs propres) est strictement positif donc A est inversible;

$$Av_0=b\Longleftrightarrow v_0=A^{-1}b$$

* D'après la question 2 : si on a un minimum en v_0 alors $v_0=A^{-1}b$
* Réciproquement :

$$\forall h\in\mathbb{R}^n: J(v_0+h)=J(v_0)+R(h)\geqslant J(v_0)$$

L'égalité est obtenue si et seulement si $R(h)=\dfrac{1}{2}<Ah,h>=0$, *Or* A est définie positive donc $h=0$

$$\boxed{\exists! v_0=A^{-1}b\ ,\ J(v_0)=\min\left(J(v),v\in\mathbb{R}^n\right)}$$

b) Pour tout $\rho\in\mathbb{R}$ on peut écrire (adaptation de la formule de la question **C.2)**:

$$J(v-\rho d)=J(v)-\rho<\nabla J(v),d>+\frac{1}{2}\rho^2<Ad,d>$$

Comme $d\neq 0$ et A définie positive on a $<Ad,d>>0$. On a donc un trinôme du second degré :

$$J(v)-\rho<\nabla J(v),d>+\frac{1}{2}\rho^2<Ad,d>=\frac{1}{2}<Ad,d>\left(\rho-\frac{<\nabla J(v),d>}{<Ad,d>}\right)^2+\left(J(v)-\frac{1}{2}\frac{<\nabla J(v),d>^2}{<Ad,d>}\right)$$

On a donc un minimum atteint pour l'unique

$$\boxed{r=\frac{<\nabla J(v),d>}{<Ad,d>}}$$

.

4) A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale $(e'_i)_{i=1}^n$. Si $v=\sum_{i=1}^n v'_ie'_i$ on a $Av=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_ie'_i$

et $(Av,v)=\sum_{i=1}^n\lambda_iv'^2_i$

– a)

$$\begin{aligned}<\ &\nabla J(v)-\nabla J(u),v-u>=<A(v-u),v-u>=\sum_{i=1}^n\lambda_i(v'_i-u'_i)^2\\ \geq\ &\min(\lambda_i,i=1..n)\sum_{i=1}^n(v'_i-u'_i)^2=\min(\lambda_i,i=1..n)\left\|v-u\right\|^2\end{aligned}$$

– b)

$$\begin{aligned}||\nabla J(v)-\nabla J(u)||^2 &= ||A(v-u)||^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2(v'_i-u'_i)^2\\ &\leq \max(\lambda_i,i=1..n)\sum_{i=1}^n(v'_i-u'_i)^2=\max(\lambda_i,i=1..n)\left\|v-u\right\|^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut prendre }\alpha=\min(\lambda,\lambda\in Sp(A))\ ,\ m=\max(\lambda,\lambda\in Sp(A))}$$

Les deux quantités sont strictement positives car A est définie positive . (**Q1)**

5) Comme $b \in \mathrm{Im}(A)$, il existe bien u_0 tel que $Au_0 = b$

- On sait déjà que si $J(v_0) = \min(J(v), v \in E)$ alors $\nabla J(v) = 0$ donc $Av_0 - b = 0$ soit $A(v_0 - u_0) = 0$ donc $v_0 - u_0 \in \mathrm{Ker}(A)$
- Réciproquement si $v_0 - u_0 \in \mathrm{Ker}(A)$ on a $Av_0 - b = 0$ donc $\nabla J(v_0) = 0$ et donc :

$$\forall h \in E \ , \ J(v_0 + h) = J(v_0) + \frac{1}{2} < Ah, h > \geqslant J(v_0)$$

et donc : $J(v_0)$ est le minimum si et seulement si $v_0 - u_0 \in \mathrm{Ker}(A)$

$$\boxed{v_0 \text{ est élément du sous espace affine passant par } u_0 \text{ et dirigé par } \ker(A)}$$

Remarque : si A n'est pas inversible et si $b \notin \mathrm{Im}(A)$ l'équation $\nabla J(v) = 0$ n'a pas de racine et donc J n'a pas de minimum.

Partie 2

II.A 1) On cherche $\max\left(\dfrac{||Mx||_\infty}{||x||_\infty}, x \neq 0\right)$. On a :On cherche $\max\left(\dfrac{||Mx||_\infty}{||x||_\infty}, x \neq 0\right)$. On a :

$$||Mx||_\infty = \max\left(|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j|, i = 1..n\right)$$

- On majore en faisant apparaître le max de $|x_j|$: pour i fixé :

$$|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}||x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \max\{|x_j|, j = 1..n\} = \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|||x||_\infty \leq \max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i = 1..n\right) \|x\|$$

donc $\max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i = 1..n\right)$ est un majorant de $\left\{\dfrac{||Mx||_\infty}{||x||_\infty}, x \neq 0\right\}$.

- Mais ce majorant est atteint : Pour avoir l'égalité dans l'inégalité il suffit d'avoir $\forall j \ m_{i,j}x_j \geq 0$ et $\forall j$, $|x_j| = \max\{|x_j|, j = 1..n$ et $\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i = 1..n\right)$. On prend donc:
  - l'indice i pour le quel $\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i = 1..n\right)$: il existe car l'ensemble est fini non vide.
  - les x_j égaux en valeur absolue
  - les x_j du signe de $m_{i,j}$ si $\forall j$,

  Si on pose : $x_j = \begin{cases} 1 \text{ si } m_{i;j} \geq 0 \\ -1 \text{ si } m_{i;j} < 0 \end{cases}$ on a :

$$|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j| = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = \left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|\right) ||x||_\infty = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i = 1..n\right) \|x\|$$

Le majorant est atteint c'est donc bien un maximum :

$$\boxed{N_\infty(M) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i = 1..n\right)}$$

2) a) Si N est la norme subordonnée à ν, on a

$$\forall x \in E, x \neq 0 : \nu(Mx) \leqslant N(M)\nu(x)$$

et donc :

$$\forall x \in E, x \neq 0 : \nu(ABx) \leqslant N(A)\nu(Bx) \leqslant N(A)N(B)\nu(x)$$

$N(A)N(B)$ majore donc $\left\{\dfrac{\nu(ABx)}{\nu(x)}, x \neq 0\right\}$, le maximum est donc plus petit :

$$\boxed{N(AB) \leqslant N(A)N(B)}$$

. Par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}^*$: $N(A^k) \leqslant (N(A))^k$.

b) le rayon spectrale est $\rho(M) = \max\left(|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\right)$
Soit λ la valeur propre de M telle que $|\lambda| = \max\left(|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\right)$. λ existe car le spectre est fini.
Par définition :

$$\exists x \neq 0, Mx = \lambda x$$

On a donc : $\dfrac{\nu(Mx)}{\nu(x)} = |\lambda| = \rho(M)$. Et donc $\rho(M) \in \left\{\dfrac{\nu(Mx)}{\nu(x)}, x \neq 0\right\}$. Donc par définition du max :

$$\boxed{\rho(M) \leqslant N(M)}$$

.

3) a) $P_\alpha = \operatorname{diag}\left\{\alpha^i, i = 0..n-1\right\}$ est inversible ($\alpha \neq 0$) d'inverse $\operatorname{diag}\left(1/\alpha^i, i = 0..n-1\right)$, et donc si $N = P_\alpha^{-1} M P_\alpha$ on a

$$n_{i,j} = \frac{1}{\alpha^{i-1}} m_{i,j} \alpha^{j-1} = m_{i,j} \alpha^{j-i}$$

.

b) D'après la question 1 :$N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}\alpha^{j-i}|, i = 1..n\right)$.

On peut choisir l'indice i (qui peut dépendre de α) tel que ce maximum est atteint : $\exists i \in [[1, n]]$, $N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) = \sum_{j=1}^{n} |m$

Mais la matrice M est triangulaire supérieure donc aussi N et les coefficients pour $i > j$ sont nuls et donc :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) = \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}\alpha^{j-i}| = \sum_{j=i}^{n} |m_{i,j}\alpha^{j-i}|$$

La matrice M étant triangulaire, les valeurs propres sont les termes diagonaux, donc par définition du rayon spectrale $|m_{i,i}| \leq \rho(M)$ et donc :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) = |m_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^{n} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} \leqslant \rho(M) + \sum_{j=i+1}^{n} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} \leq \rho(M) + \|M\|_\infty \sum_{j=i+1}^{n} \alpha^{j-i}$$

$\sum_{j=i+1}^{n} \alpha^{j-i}$ est une somme géométrique de raison α . Pour $0 < \alpha < 1$ $\sum_{j=i+1}^{n} \alpha^{j-i} \leq \sum_{j=i+1}^{+\infty} \alpha^{j-i} = \dfrac{\alpha^{i+1}}{1-\alpha} \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$
On a donc la majoration :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) \leq \rho(M) + \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre α vers 0 :

$$\boxed{N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) \leqslant \rho(M) + \varepsilon}$$

Remarque : comme i dépend de α , on doit éliminer i avant de passer à la limite.

Un autre plan est de prendre un i quelconque , de trouver le majorant $\phi_i(\alpha) = \rho(M) + \sum_{j=i+1}^{n} |m_{i,j}|\alpha^{j-i}$. De passer à la limite puis de passer au maximum en disant que comme on a un nombre fini d'indice $\lim\left(\max\left(\phi_i(\alpha)\right)\right) = \max\left(\lim\left(\phi_i(\alpha)\right)\right)$

4) a) Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe P inversible telle $T = P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. On applique le 3)a) pour obtenir

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha) \leqslant \rho(M) + \varepsilon$$

b) Vue la question posée $N -> N_\infty(P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha)$ doit être une norme subordonnée :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha) = \max\left(\frac{\left\|P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha x\right\|_\infty}{\|x\|_\infty}, x \neq 0\right)$$

Si on pose $y = P P_\alpha x$ on a $x \neq 0$ ssi $y \neq 0$ et donc :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha) = \max\left(\frac{\left\|P_\alpha^{-1} P^{-1} M y\right\|_\infty}{\left\|P_\alpha^{-1} P^{-1} y\right\|_\infty}, x \neq 0\right) = \max\left(\frac{\nu(My)}{\nu(y)}, y \neq 0\right)$$

avec $\nu(y) = \left\|P_\alpha^{-1} P^{-1} y\right\|_\infty$ qui est bien une norme :

* $\nu(y) \geq 0$
* si $\nu(y) = 0$ alors $P_\alpha^{-1}P^{-1}y = 0$ donc $y = 0$
* $\nu(y+z) = \left\|P_\alpha^{-1}P^{-1}y + P_\alpha^{-1}P^{-1}y\right\|_\infty \leq \left\|P_\alpha^{-1}P^{-1}y\right\|_\infty + \left\|P_\alpha^{-1}P^{-1}z\right\|_\infty$
* $\nu(ky) = \left\|kP_\alpha^{-1}P^{-1}y\right\|_\infty = |k| \left\|P_\alpha^{-1}P^{-1}y\right\|_\infty$

  remarque le choix de y n'est pas évident mais est classique $N = P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha$ est le changement de base sur les matrices carrées, $x = P_\alpha^{-1}P^{-1}y$ est le même changement de base sur les vecteurs colonnes.

5) La suite étudiée est arithmético géométrique et donc si la limite existe :

   a) si on passe à la limite dans $x_{n+1} = Mx + c$ on a $l = Ml + c$

   b) on a $(x_{n+1} - l) = M(x_n - l)$ donc la suite $y_n = x_n - l$ est géométrique

   * Si (i) est vérifiée:
     La suite converge donc vers une limite l indépendante de x_0 .
     Soit λ une valeur propre de M et y_0 un vecteur propre associé . On pose $x_0 = y_0 + l$ On a alors $y_0 = x_0 - l$ donc $y_n = \lambda^n y_0$ et $x_n = \lambda_n y_0 + l$.
     la suite $(\lambda^n y_0)$ converge donc vers 0 , et comme $y_0 \neq 0$ on a $|\lambda| < 1$. Toutes les valeurs propres sont < 1 en module , donc aussi leur maximum donc $\rho(M) < 1$.
     Les valeurs propres de $I - M$ sont les $1 - \lambda$. Comme $|\lambda| < 1$ elles sont toutes non nulles et donc $I - M$ est inversible.
   * Si (ii) est vérifiée :
     $(I - M)$ est inversible donc :
     $$l = Ml + c \Longleftrightarrow l = (I - M)^{-1}c$$
     Si la suite converge sa limite est indépendante de x_0 . On prend cette valeur de l et $y_n = x_n - l$.
     La convergence de la suite (x_n) vers l est équivalente à la convergence de (y_n) vers 0 . Or $y_n = My$ donc $y_n = M^n y_0$.
     La convergence de la suite (x_n) vers l est équivalente à la convergence de (M^n) vers 0
     D'après la question précédente ,pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une norme telle que $N(M) \leq \rho(M) + \varepsilon$ . . Comme $\rho(M) < 1$ on peut choisir ε tel que $\pi(M) + \varepsilon < 1$ ($\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(M)}{2}$ par exemple)
     Comme on a une norme subordonnée, la question **A.2)** donne $N(M^n) \leq N(M)^n \leq (\rho(M) + \varepsilon)^n$ et donc $\lim\limits_{n->+\infty} N(M^n)$. La suite M^n tend donc vers 0 .

II.B 1) ϕ est un produit scalaire :

   * ϕ est bien a valeur dans $\mathbb{R}$ (en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$
   * ϕ est symétrique $\phi(Su, v) = \langle Su, v\rangle = \langle f_S(u), v\rangle = \langle u, f_S(v)\rangle$ car f_S est symétrique.
   * ϕ est linéaire en v (produit scalaire) donc est bilinéaire par symétrie.
   * ϕ est défini positif par définition d'une matrice définie positive.

$$\boxed{\phi \text{ est un produit scalaire}}$$

2) S est bien inversible , car comme S est définie positive : $Sx = 0 \Longrightarrow \langle Sx, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
   On prend $y = S^{-1}At \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$ et $k \in \mathrm{Ker}(A)$ On a donc : $\phi(y, k) = \langle Sy, k\rangle = \langle At, k\rangle = \langle t, Ak\rangle$ (car A est symétrique).
   et donc $\phi(y, k) = 0$. Les deux sous espaces sont donc en somme directe et comme $\dim \mathrm{Im}(S^{-1}A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$ (car S^{-1} bijective conserve les dimensions) on a $\dim(\mathrm{Im}(S^{-1}A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(S^{-1}A) \text{ et } \mathrm{Ker}(A) \text{ sont supplémentaires.}}$$

3) On peut regarder l'application ϕ_A : $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{Im}(S^{-1}A) -> \mathrm{Im}(A) \\ u -> Au \end{array}\right.$, l'application est injective car $\mathrm{Ker}(\phi_A) = \{u \in \mathrm{Im}(S^{-1}A), Au =$
   . Comme les deux sous espaces ont même dimension (question précédente et théorème du rang) , ϕ_A est un isomorphisme : $\boxed{\forall b \in \mathrm{Im}(A) \exists! u_0 \in \mathrm{Im}(S^{-1}A) \text{ , } Au_0 = b}$

– L'ensemble des solutions de $Au = b$ dans $\mathbb{R}^n$ est le sous-espace affine $u_0 + \ker(A)$.

4) On a : $u_{k+1} = u_k - \gamma S^{-1}\nabla J(u_k) = u_k - \gamma S^{-1}(Au_k - b)$

   a) On a donc comme $Au_0 = b$:
   $$u_{k+1} - u_k = \gamma S^{-1}A(u_k - u_0) \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$$
   La projection de $u_{k+1} - u_k$ sur $\mathrm{Ker}(A)$ est donc nulle. La projection de u_k sur $\ker(A)$ est donc indépendante de k .

b) On a

$$\begin{aligned} u'_{k+1} &= u_{k+1} - w = u_k - \gamma S^{-1}(Au_k - b) + w \\ &= u'_k - \gamma S^{-1}(Au'_k + Aw - b) \\ &= u'_k - \gamma S^{-1}\left(Au'_k - b\right) \text{ car } w \in \operatorname{Ker}(A) \end{aligned}$$

$$\boxed{u'_{k+1} = f(u'_k) \text{ avec } f : u -> (I - \gamma S^{-1}A)u + \gamma S^{-1}b}$$

c)

* On sait que $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$.
* S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale $S = PD^tP$, avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. si on pose $X = PY$ on a ${}^t\overline{X} = P^t\overline{Y}$ (car P est à coefficients réelles) avec $Y \neq 0$ donc ${}^t\bar{X}SX = {}^t\overline{Y}DY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0$ (les valeurs propres de S sont strictement positives et $y \neq 0$)
* de même ${}^t\bar{X}AX \geq 0$
* Soit alors λ une valeur propre complexe de $S^{-1}A$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé . On a $S^{-1}AX = \lambda X$ d'où $AX = \lambda SX$ et ${}^t\bar{X}AX = \lambda^t\bar{X}SX$ et donc $\lambda = \dfrac{{}^t\bar{X}AX}{{}^t\bar{X}SX} \geq 0$

$$\boxed{Sp(S^{-1}A) \in \mathbb{R}^+}$$

d) g est par définition un endomorphisme de $\operatorname{Im}(S^{-1}A)$.
On a $g(x) = 0 \Longleftrightarrow S^{-1}Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(A)$. Mais $x \in \operatorname{Im}(S^{-1}A)$, donc d'après **B.2)** on a $x = 0$.
On a un endomorphisme en dimension finie , de noyau réduit à 0.

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme}}$$

e) g est un endomorphisme induit par $f_{S^{-1}A}$ donc les valeurs propres complexes de g sont des valeurs propres de $S^{-1}A$, elles sont donc dans $\mathbb{R}^+$; Les valeurs propres de $id - \gamma g$ sont les réels $1 - \gamma\lambda$ avec λ valeur propre de g ($g(x) = \lambda x$ ssi $(Id - \gamma g)(x) = (1 - \gamma\lambda)x$) Le polynôme caractéristique a toutes ses racines réelles : il est scindé dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$.
On a vu que les valeurs propres de g étaient positives, mais g est inversible, elles sont donc strictement positives . et donc

$$\forall\lambda \in Sp(g) \ , \ 0 < \lambda \leqslant \Lambda_n$$

On a alors $1 - \gamma\lambda \in]1 - \gamma\Lambda_n, 1[\subset] - 1, 1[$ par choix de γ. $\rho(id - \gamma g) = \max\left(|\mu| \, , \mu \in Sp(Id - \gamma g)\right) < 1$

f) La suite (u'_k) est définie par $u'_{k+1} = f(u'_k) = (id - \gamma g)(u'k) + c$ avec $c = \gamma S^{-1}b$. Puisque $id - \gamma g$ est inversible et que $\rho(id - \gamma g) < 1$, la question **A.5** montre que la suite (u'_k) converge dans $\operatorname{Im}(S^{-1}A)$ vers une limite u' indépendante de u'_0.

g) Par continuité de $id - \gamma g$ on a $u' = (id - \gamma g)(u') + c$ donc $\gamma g(u') = c$, $\gamma S^{-1}Au' = \gamma S^{-1}b$ et enfin $\boxed{Au' = b}$

Partie 3

•III.A 1)

* Si $d_k = 0$ le résultat est évident.
* Si $d_k \neq 0$ on peut appliquer le **I.C.3b)** (A est bien définie positive) et donc

$$r_k = \frac{< \nabla J(u_k), d_k >}{< Ad_k, d_k >} = \frac{< d_k, d_k >}{< Ad_k, d_k >}$$

On a donc en exprimant d_{k+1} en fonction de d_k : :

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= \nabla J(u_{k+1}) = Au_{k+1} - b = A\left(u_k - r_k d_k\right) - b \\ &= \nabla J(u_k) - r_k A d_k = d_k - r_k A d_k \end{aligned}$$

. On en déduit:

$$< d_{k+1}, d_k > = < d_k, d_k > - r_k < Ad_k, d_k > = 0$$

$$\boxed{\forall k \ , \ (d_{k+1}, d_k) = 0}$$

2)

* Le **I.C;2** donne $J(v+h) = J(v) + < Av - b, h > + \frac{1}{2} < Ah, h >$ et donc

$$J(u_{k+1}) = J(u_k - r_k d_k) = J(u_k) + \langle Au_k - b, -r_k d_k \rangle + \frac{r_k^2}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle$$

donc

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) = \langle Au_k - b, r_k d_k \rangle - \frac{r_k^2}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle = \langle d_k, r_k d_k \rangle - \frac{r_k^2}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle$$

par calcul $r_k = \dfrac{< d_k, d_k >}{< Ad_k, d_k >}$ et donc

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) = \langle Au_k - b, r_k d_k \rangle - \frac{r_k^2}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle = \frac{1}{2} r_k \langle d_k, d_k \rangle$$

* le **I.C.4** donne $< \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u > \geq \alpha \|u - v\|^2$ si $\alpha = \min(|\lambda|, \lambda \in Sp(A))$ et donc :

$$< \nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k+1}), u_k - u_{k+1} > \geq \alpha \|u_k - u_{k+1}\|^2$$

soit

$$\langle d_k - d_{k+1}, r_k d_k \rangle \geq \alpha \|u_k - u_{k+1}\|^2$$

et comme $d_k \perp d_{k+1}$ on a

$$r_k \langle d_k, d_k \rangle \geq \alpha \|u_k - u_{k+1}\|^2$$

et donc :

$$\boxed{J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2} \|u_k - u_{k+1}\|^2}$$

3) la suite $(J(u_k))$ est donc décroissante; minorée (on a trouvé un unique plus petit élément au **I.C.3**) donc elle converge.
Par majoration l'inégalité précédente donne

$$\boxed{\lim_{k->+\infty} (||u_{k+1} - u_k||) = 0}$$

Comme $d_k \perp d_{k+1}$ Pythagore donne $\|d_{k+1} - d_k\|^2 = \|d_{k+1}\|^2 + \|d_k\|^2$ d'où l'inégalité : $\|d_k\| \leq \|d_{k+1} - d_k\|$
Mais $d_{k+1} - d_k = (Au_{k+1} - b) - (Au_k - b) = A(u_{k+1} - u_k)$ Comme la suite $(u_{k+1} - u_k)$ tend vers 0 la suite $(d_{k+1} - d_k)$ tend vers 0 et donc aussi la suite (d_k) .

$$\boxed{\lim_{k->+\infty} (d_k) = 0}$$

5) v_0 vérifie $Av_0 = b$ donc $\nabla J(v_0) = 0$. On a donc avec le **I.C.4**:

$$< \nabla J(u_k), u_k - v_0 > = < \nabla J(u_k) - \nabla J(v_0), u_k - v_0 > \geqslant \alpha ||u_k - v_0||^2$$

Or par continuité du produit scalaire $\lim (\langle d_k, u_k - v_0 \rangle) = \langle \lim(d_k), \lim(u_k) - v_0 \rangle$, les deux suites étant convergente. donc $< \nabla J(u_k), u_k - v_0 >$ converge vers 0 donc aussi $(||u_k - v_0||)$ (rappel $\alpha > 0$)

$$\boxed{\text{la suite } (u_k) \text{ converge vers } v_0}$$

III.B 1) On reprend les notations

$$d_k = Au_k - 0 = \begin{pmatrix} x_k \\ cy_k \end{pmatrix}$$

puis avec la formule de **I.C.3.** .

$$r_k = \frac{< d_k, d_k >}{< Ad_k, d_k >} = \frac{x_k^2 + c^2 y_k^2}{x_k^2 + c^3 y_k^2}$$

donc

$$u_{k+1} = u_k - r_k d_k = \begin{pmatrix} \dfrac{x_k y_k^2 c^2 (c-1)}{x_k^2 + c^3 y_k^2} \\ \dfrac{x_k y_k^2 (1-c)}{x_k^2 + c^3 y_k^2} \end{pmatrix}$$

Comme $c > 0$ et $c \neq 1$ $(x_k \neq 0$ et $y_k \neq 0) \Rightarrow (x_{k+1} \neq 0$ et $y_{k+1} \neq 0)$ donc par récurrence : $\forall k$, $(x_k \neq 0$ et $y_k \neq 0)$

2) On a donc $t_{k+1} = \dfrac{y_{k+1}}{y_k} = \dfrac{-x_k}{c^2 y_k}$ donc $\boxed{t_k t_{k+1} = \dfrac{-1}{c^2}}$.

3) On en déduit que $t_{k+1}t_{k+2} = t_k t_{k+1}$ et comme $t_{k+1} \neq 0$ on a $t_{k+2} = t_k$. Les vecteurs u_{k+2} et u_k ont la même pente , ils sont proportionnels.
On a alors :

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{x_k^2(1-c)}{x_k^2 + c^3 y_k^2} = \frac{(1-c)}{1 + c^3 t_k^2}$$

d'où

$$\frac{y_{k+2}}{y_k} = \frac{(1-c)^2}{\left(1 + c^3 t_k^2\right)\left(1 + c^3 t_{k+1}^2\right)}$$

Mais si k est pair $t_k = t_0$ et $t_{k+1} = t_1$ et si k est impair $t_k = t_1$ et $t_{k+1} = t_0$ et donc

$$\frac{y_{k+2}}{y_k} = \frac{(1-c)^2}{\left(1 + c^3 t_0^2\right)\left(1 + c^3 t_1^2\right)} \text{ est constant}$$

Les points (u_{2k}) forment une suite géométrique sur une droite , les points (u_{2k+1}) forment une suite géométrique sur une autre droite. La raison des suites étant $\dfrac{(1-c)^2}{\left(1 + c^3 t_0^2\right)\left(1 + c^3 t_1^2\right)}$

pour $c > 1$ on a $\dfrac{(1-c)^2}{\left(1 + c^3 t_0^2\right)\left(1 + c^3 t_1^2\right)} < \dfrac{(c-1)^2}{c^6 \left(t_0 t_1\right)^2} = \left(\dfrac{c-1}{c}\right)^2 < 1$. les deux suites de points convergent bien vers 0 .