

Le sujet est inspiré d'un sujet de Centrale 1989. Il reprend principalement les 2 premières parties du sujet posé en option TA (actuelle PT) complétées par quelques questions posées en option P (actuel PC) avec quelques adaptations au programme actuel.

## PREMIERE PARTIE

1. a) Soit  $U_n = a$  une suite constante alors on a par passage à la limite :  $a = a^2$  donc  $\boxed{a = 0 \text{ ou } a = 1}$ .

Réciproquement, les suites constantes égales à 0 ou 1 sont dans  $S$ .

b) Si  $l$  est une limite finie d'une suite  $(U_n)$  de  $S$  alors, par passage à la limite dans la relation  $(\mathcal{R})$  on obtient  $l^2 = l$ .

Comme tous les termes de la suite  $(U_n)$  sont positifs, la seule limite infinie possible est  $+\infty$ .

$$\boxed{l = 0, l = 1 \text{ ou } l = +\infty}$$

c) Si  $U_{N-1} = U_N = U_{N+1} = a$  alors, comme à la question a. on a  $a = a^2$  donc  $a = 0$  ou  $a = 1$

• étude pour  $n \geq N$  : Par récurrence **double** sur  $n \geq N$ , on vérifie que  $U_n = a$  et  $U_{n+1} = a$

– vrai si  $n = N$

– si  $U_n = a$  et  $U_{n+1} = a$  alors  $U_{n+2} = \frac{1}{2}(U_{n+1}^2 + U_n^2) = a$ . Donc  $\forall n \geq N, U_n = a$

mais il ne faut pas oublier les  $n \leq N$

• étude si  $n \leq N$ . Par récurrence **double** sur  $n \leq N$ , on vérifie que  $U_n = a$  et  $U_{n+1} = a$

– vrai si  $n = N$

– si  $U_n = a$  et  $U_{n+1} = a$  alors  $U_{n-1}^2 = 2U_{n+1} - U_n^2 = 2a - a^2 = a^2$  et comme  $U_{n-1} \geq 0$  et  $a \geq 0$  :  $U_{n-1} = a$

$\boxed{\text{Si la suite a trois termes consécutifs égaux alors la suite est constante égale à 0 ou à 1}}$

d) Si  $U_{n-1} = U_n = 1$  alors on a aussi  $U_{n+1} = 1$  et on applique la question précédente.

e) Si  $U_n = 0$  avec  $n \geq 2$  alors  $\frac{1}{2}(U_{n-2}^2 + U_{n-1}^2) = 0$  donc  $U_n = U_{n-1} = U_{n-2} = 0$ , on applique là aussi la question c.

2.

a) On a  $Y \geq X \geq 0$  donc  $Y^2 \geq X^2$  et donc  $Y^2 \geq \frac{X^2 + Y^2}{2} \geq Y$  et donc  $Y^2 - Y = Y(Y - 1) \geq 0$  donc  $Y = 0$  ou  $Y \geq 1$ .

Or  $0 \leq X \leq Y$  donc si  $Y = 0$  alors  $X = 0$ .

$$\boxed{\left(0 \leq X \leq Y \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}\right) \implies (Y \geq 1 \text{ ou } X = Y = 0)}$$

b) On a maintenant  $0 \leq X \leq Y$  donc  $X^2 \leq Y^2$  donc  $Y^2 \leq \frac{X^2 + Y^2}{2} \leq Y$  donc  $Y(Y - 1) \leq 0$  donc  $Y \in [0, 1]$

$$\boxed{\left(\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \leq Y\right) \implies (Y \leq 1)}$$

remarque :  $\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X$  suffit :  $\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \implies X^2 + Y^2 - 2X \leq 0 \implies (X-1)^2 + (Y^2-1) \leq 0 \implies Y^2 - 1 \leq 0 \implies Y \leq 1$

la forme choisie par le sujet est plus adaptée à la suite du problème.

3. On a pour tout  $n \geq 2$  :  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}((U_n^2 + U_{n-1}^2) - (U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2)) = \frac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-2}^2) = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-2})(U_n + U_{n-2})$

Si  $(U_n + U_{n-2}) > 0$  les deux autres quantités sont de même signe.

Si  $(U_n + U_{n-2}) = 0$  alors  $U_n = 0$  avec  $n \geq 2$  donc (1.e) la suite est nulle et le résultat reste valable.

$$\boxed{\text{sgn}(U_{n+1} - U_n) = \text{sgn}(U_n - U_{n-2})}$$

4. a) Supposons que  $U_{N+1} \geq U_N$  et  $U_{N+1} \geq U_{N-1}$  alors, vu la question précédente, on sait que :

$$\text{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \text{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$$

et donc  $\boxed{U_{N+2} \geq U_{N+1} \geq U_N}$ .

b) Par récurrence double on a alors

$$\forall p \geq N, U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p.$$

- la propriété est vraie si  $p = N$
- si  $U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p$  alors d'après la question 3) avec  $n = p + 2$  :  $U_{p+3} \geq U_{p+2}$  et  $U_{p+2} \geq U_{p+1}$  est déjà supposé vrai.

ce qui montre bien :

la suite  $(U_n)_{n \geq N}$  est croissante

c) Si  $U_n = U_{n+1}$  alors (toujours Q3)  $U_n = U_{n-2}$ , et donc comme la suite est croissante à partir du rang  $N$  : pour  $n - 2 \geq N$   $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$ . On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante. Ce qui est exclu par le sujet.

la suite  $(U_n)_{n \geq N+2}$  est strictement croissante

remarque : attention au plus petit indice pour le quel on peut utiliser les hypothèses.

d) Dans la question 2. on prend  $X = U_N, Y = U_{N+1}$  et donc  $U_{N+2} = \frac{X^2 + Y^2}{2}$  on a donc par croissance  $X \leq Y \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$  donc  $Y = U_{N+1} \geq 1$  ou  $U_N = U_{N+1} = 0$ . le second cas est exclu car la suite n'est pas constante ( si  $U_N = U_{N+1} = 0$  on a  $U_{N+2} = 0$  et le 1.c s'applique) . Donc  $U_{N+1} \geq 1$ , donc aussi  $U_{N+2} \geq 1$ . A partir  $N + 2$  la suite est strictement croissante. Elle converge vers  $l > 1$  ou elle diverge vers  $+\infty$ . D'après la question 1 seule la seconde solution est possible.

$(U_{N+1} \geq U_N \text{ et } U_{N+1} \geq U_{N-1}) \Rightarrow \lim (U_n) = +\infty$

5. Même principe en utilisant que  $\text{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \text{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$

a) Supposons que  $U_{N+1} \leq U_N$  et  $U_{N+1} \leq U_{N-1}$  alors, vu la question précédente, on sait que  $\text{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \text{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$  et donc  $\boxed{U_{N+2} \leq U_{N+1} \leq U_N}$ .

b) Par récurrence on a alors

$$\forall p \geq N, U_{p+2} \leq U_{p+1} \leq U_p.$$

et donc la suite  $(U_n)_{n \geq N}$  est décroissante.

c) Si  $U_n = U_{n+1}$  alors (toujours Q3)  $U_n = U_{n-2}$ , et donc comme la suite est décroissante à partir du rang  $N$ , pour  $n - 2 \geq N$ ,  $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$ . On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante. Ce qui est exclu par le sujet.

la suite  $(U_n)_{n \geq N+2}$  est strictement décroissante

d) On prend  $X = U_{N+1}, Y = U_N$  et donc  $U_{N+2} = \frac{X^2 + Y^2}{2}$  on a donc par décroissance  $\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \leq Y$  donc  $Y = U_N \leq 1$

On a  $U_{N+2} \leq 1$  puis une suite qui décroît strictement.. La seule limite possible est 0 (cf question 1) on a

$(U_{N+1} \leq U_N \text{ et } U_{N+1} \leq U_{N-1}) \Rightarrow \lim (U_n) = 0$

remarque : encore un détail qu'il est souhaitable de bien montrer. au 4.d) on arrive à  $Y = U_{n+1} \geq 1$  ici c'est  $Y = U_N \leq 1$

6.

- si  $U_0 = \sqrt{2}$  et  $U_1 = 0$  on a  $U_2 = 1$ ,  $U_3 = \frac{1}{2}$ ,  $U_4 = \frac{5}{8}$ ,  $U_5 = \frac{41}{128}$  on a  $U_5$  inférieur ou égal à  $U_4$  et à  $U_3$ . On peut utiliser la question 5

$$\boxed{\lim_{+\infty} (U_n(\sqrt{2}, 0)) = 0}$$

- si  $U_0 = 2$  et  $U_1 = 0$  on a  $U_2 = 2$ ,  $U_3 = 2$ , on a  $U_3$  supérieur ou égal à  $U_2$  et à  $U_1$ . On peut utiliser la question 4

$$\boxed{\lim_{+\infty} (U_n(2, 0)) = +\infty}$$

7. a) par l'absurde on suppose  $U_0 = U_1$  et on distingue trois cas :

- $U_0 = U_1 = U_2$  alors la suite est constante d'après Q1c), absurde par hypothèse
- $U_0 = U_1 < U_2$  les hypothèses de I4 avec  $N = 1$  s'appliquent  $\lim (U_n) = +\infty$  absurde par hypothèse
- $U_0 = U_1 > U_2$  les hypothèses de I5 s'appliquent  $\lim (U_n) = 0$  absurde par hypothèse

b) même principe : ( $n \geq 2$  pour que  $U_{n-2}$  existe)

- si  $U_n = U_{n-1}$  la méthode du a) prouve que c'est absurde en prenant les 3 cas pour  $U_{n+1}$  : donc  $U_n \neq U_{n-1}$
- si  $U_n < U_{n-1}$  et si  $U_n \leq U_{n-2}$  alors  $\lim (U_n) = 0$  en prenant  $N = n-1$  dans la question 5:: donc  $U_n < U_{n-1} \Rightarrow U_{n-2} < U_n$

- de même avec la question 4  $U_n > U_{n-1} \Rightarrow U_{n-2} > U_n > U_{n-1}$

$$\boxed{\text{pour } n \geq 2, U_n \text{ est strictement compris entre } U_{n-2} \text{ et } U_{n-1}}$$

c) On applique par récurrence la question précédente :

- $U_2$  est strictement compris entre  $U_0$  et  $U_1$  donc  $U_0 < U_2 < U_1$
- $U_3$  est strictement compris entre  $U_1$  et  $U_2$  donc  $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$
- $U_4$  est strictement compris entre  $U_2$  et  $U_3$  donc  $U_0 < U_2 < U_4 < U_3 < U_1$
- On suppose que pour  $p$  fixé  $U_0 < U_2 < \dots < U_{2p} < U_{2p+1} < \dots < U_1$   
alors comme  $U_{2p+2}$  est strictement compris entre  $U_{2p}$  et  $U_{2p+1}$ , puis comme  $U_{2p+3}$  est strictement compris entre  $U_{2p+1}$  et  $U_{2p+2}$  on a :

$$U_0 < U_2 < \dots < U_{2p} < U_{2p+2} < U_{2p+3} < U_{2p+1} < \dots < U_1$$

La suite des termes paires est croissante majorée par  $U_1$  elle converge vers  $\lambda > 0$  (car  $\lambda \geq U_2 > U_0 \geq 0$ )

La suite des termes impairs est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers  $\mu$

Comme  $U_{2n+1} = \frac{U_{2n}^2 + U_{2n-1}^2}{2}$  on a  $\mu = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$  et de même  $\lambda = \frac{\mu^2 + \lambda^2}{2}$  donc  $\lambda = \mu > 0$  et donc en reportant  $\lambda^2 = \lambda$  et  $\lambda > 0$  donc  $\lambda = 1$

Remarque : je n'arrive pas à utiliser directement le théorème des suites adjacentes en prouvant  $\lim (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$

d) On a vu tous les cas possibles :

$$\boxed{Q = E_0 \cup E_1 \cup E_\infty}$$

de plus  $E_0$  contient  $(0, 0)$  et  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $E_1$  contient  $(1, 1)$  et  $E_\infty$  contient  $(2, 0)$

8.

- 1)  $\Rightarrow$  2) . On suppose qu'il existe un entier  $N \geq 0$  tel que  $U_N \geq 1$  et  $U_{N+1} \geq 1$ . D'après 1.d si  $U_N = 1$  et  $U_{N+1} = 1$  la suite est constante (impossible ici) donc  $U_N > 1$  ou  $U_{N+1} > 1$ .  
D'après la formule de récurrence du sujet on a donc que  $U_{N+2} > 1$  et  $U_{N+3} > 1$ .  
On peut alors vérifier par récurrence double que pour  $n \geq N + 2$  on a  $U_n > 1$ .  
On a d'après la remarque  $U_{n+2} \geq U_n U_{n+1} > U_{n+1}$  dès que  $n \geq N + 2$ . On a donc  $U_{n+1} > U_n$  dès que  $n \geq N + 3$   
La suite est strictement croissante à partir du rang  $n + 3$
- 2)  $\Rightarrow$  3) : Si la suite est strictement croissante à partir du rang  $P$  on a  $U_{P+1} > U_P \geq 0$ . La limite de la suite croissante est plus grande que  $U_{P+1}$  donc est non nul.  
Si la limite n'est pas non plus infini (raisonnement par l'absurde) on est dans les hypothèse de la question 7, et la suite n'est pas strictement croissante.  
La suite tend donc vers  $+\infty$ .
- 3)  $\Rightarrow$  1) est évident par définition d'une limite infinie.

On a donc une description de la position de  $U_n$  par rapport à 1:

- si deux termes consécutifs sont  $> 1$  la suite diverge vers  $+\infty$
- si deux termes consécutifs sont  $< 1$  la suite converge vers 0
- si la suite oscille indéfiniment autour de 1 elle converge vers 1.
- il n'y a pas d'autres cas possibles.

## DEUXIEME PARTIE

1. figures en annexe

On utilisera régulièrement que  $x$  et  $y$  sont positifs pour extraire les racines carrées.

a)  $U_2(x, y) = 1 \iff x^2 + y^2 = 2$ , cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ . L'ensemble des  $(x, y)$  tels que  $U(x, y) \leq 1$  est le disque intérieur au cercle.

b)  $U_3(x, y) = 1 \iff \frac{1}{2} \left( y^2 + \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 \right) = 1 \iff 4y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 8 \iff (x^2 + y^2) = \sqrt{8 - 4y^2}$  et  $y \leq \sqrt{2} \iff x^2 = \sqrt{8 - 4y^2}$   
et  $y \leq \sqrt{2}$

On doit avoir  $\sqrt{8 - 4y^2} - y^2 \geq 0$  ce qui équivaut à  $\sqrt{8 - 4y^2} \geq y^2$ . comme tout est positif on étudie  $8 - 4y^2 \geq y^4$  soit  $y^4 + 4y^2 - 8 \leq 0$  on résout  $Y^2 + 4Y - 8 = 0$  :  $y \leq \sqrt{2\sqrt{3} - 2}$

On a donc :

$$U_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{8-4y^2} - y^2} \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{2\sqrt{3}-2}$$

$h$  est continue sur  $\left[0, \sqrt{2\sqrt{3}-2}\right]$  et dérivable sur  $\left]0, \sqrt{2\sqrt{3}-2}\right[$

$$h'(y) = \frac{\frac{-4y}{\sqrt{8-4y^2}} - 2y}{2h(y)}$$

La fonction  $h$  est donc décroissante sur son domaine de définition.

d'où  $h(0) = \sqrt{2\sqrt{2}}$ ,  $h'(0) = 0$ ,  $h\left(\sqrt{2\sqrt{3}-2}\right) = 0$  avec une tangente verticale. D'où le graphe de  $h$  et celui de  $C_3$  par symétrie par rapport à la première bissectrice.

c) L'intersection de  $C_2$  et  $C_3$  est obtenue pour  $U_2 = U_3 = 1$ , donc (I.1.d) pour la suite constante égale à 1 :  $C_2 \cap C_3 = \{(1, 1)\}$

d) tout point à l'intérieur de  $C_2$  et  $C_3$  vérifie  $U_2 < 1$  et  $U_3 < 1$  donc est dans  $E_0$  d'après I.7. de même tout point extérieur aux deux surfaces est dans  $E_\infty$ .

2. a) pour  $k > 1$  : récurrence double

- $U_0(kx, ky) = kx \geq x = U_0(x, y)$ ,  $U_1(kx, ky) = ky \geq y = U_1(x, y)$ .
- Si  $U_n(kx, ky) \geq kU_n(x, y)$  et  $U_{n-1}(kx, ky) \geq kU_{n-1}(x, y)$  alors  $U_{n+1}(kx, ky) \geq k^2U_{n+1}(x, y) \geq kU_{n+1}(x, y)$  car pour  $k \geq 1$ ,  $k^2 \geq k$

b) Si  $M \in E_0$  alors  $\lim(U_n) = 0$  donc à partir d'un certain rang  $U_n(x, y) < 1$ . la question précédente donne pour  $k < 1$   $U_n(kx, ky) < 1$  donc d'après I.8  $(kx, ky) \in E_0$ . Le résultat est évident si  $k = 1$  donc  $\boxed{[OM] \in E_0}$

Idem avec plus grand que 1. :  $M \in E_\infty \Rightarrow$  la demi droite  $[M, \dots] \in E_\infty$

Si  $M \in E_1$  :  $\lim(U_n(x, y)) = 1$ . soit  $k < 1$  on a donc  $U_n(kx, ky) \leq kU_n(x, y)$ .

Or  $U_n(x, y)$  tend vers 1 alors que  $\frac{1}{k} > 1$ , donc à partir d'un certain rang  $U_n(x, y) < \frac{1}{k}$  et donc  $U_n(kx, ky) < 1$  et de nouveau **I.8** donne  $\lim(U_n(kx, ky)) = 0$

donc  $k < 1 \Rightarrow (kx, ky) \in E_0$ . de même  $k > 1 \Rightarrow (kx, ky) \in E_\infty$

$$\boxed{E_0 \cap D = [0, M[, E_1 \cap D = \{M\}, E_\infty \cap D = ]M, \dots]}$$

3. a)

- $O$  est un point de  $D \cap E_0$  donc  $0 \in \Omega$ .
- Si  $D$  n'est ni horizontale ni verticale  $D$  contient des points vérifiant  $x > 1$  et  $y > 1$  donc  $U_0(x, y) > 1$  et  $U_1(x, y) > 1$  donc  $(x, y) \in E_\infty$  toujours I.7  
Si  $D$  est horizontale on prend  $(2, 0)$  déjà connu. ..et si  $D$  est verticale  $(0, 2) \in E_\infty$  car  $U_2(0, 2) = 2 > 1$ .
- d'après **II.2.b** il y a au plus un point de  $E_1$

b) Il existe un  $T$  tel que  $M_T \in E_\infty$ . D'après II.3.b on a alors  $t \geq T \Rightarrow M_t \in E_\infty \Rightarrow M_t \notin E_0$ .  $T$  majore  $\Omega$ .

$\Omega$  étant non vide majoré dans  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma$  existe bien.

c) Soit  $t < \gamma$ . comme  $\gamma = \sup(\Omega)$  il existe  $T > t$  et  $T \in \Omega$ . donc  $M_T \in E_0$  et  $M_t \in [O, M_T]$ . Donc  $M_t \in E_0$  d'après II.3.b

4.

a) récurrence double :

- $U_0$  et  $U_1$  sont continues sur  $Q$
- si  $U_{n-1}$  et  $U_n$  sont continues sur  $Q$  alors  $U_{n+1}$  est continue sur  $Q$  comme produit et combinaison linéaire de fonctions continues.

**b) par l'absurde :**

Si la suite  $(U_n(\gamma x_0, \gamma y_0))$  tend vers 0. Donc il existe  $N$  tel que  $U_N(\gamma x_0, \gamma y_0) \leq 1/2$  et  $U_{N+1}(\gamma x_0, \gamma y_0) \leq 1/2$ . La continuité prouvée à la question précédente montre alors qu'il existe un  $\varepsilon$  tel que pour tout  $t \in [\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon]$  :  $U_N(tx_0, ty_0) \leq 1$  et  $U_{N+1}(tx_0, ty_0) < 1$ . La suite converge donc vers 0 et en particulier  $(U_N((\gamma + \varepsilon)x_0, (\gamma + \varepsilon)y_0))$  tend vers 0 et donc  $\gamma + \varepsilon \in \Omega$ . Ce qui contredit le fait que  $\gamma$  majore  $\Omega$ .

c) Si la suite  $(U_n(\gamma x_0, \gamma y_0))$  tend vers  $+\infty$ , on a de même un  $N$  tel que  $U_N(\gamma x_0, \gamma y_0) \geq 2$  et  $U_{N+1}(\gamma x_0, \gamma y_0) \geq 2$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in [\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon]$  :  $U_N(tx_0, ty_0) \geq 1$  et  $U_{N+1}(tx_0, ty_0) \geq 1$  et donc  $M_{\gamma-\varepsilon} \in E_\infty$ . Or  $M_{\gamma-\alpha} \in [0, M_\gamma[$  donc d'après le **II.3.c**  $M_{\gamma-\alpha} \in E_0$  : absurde

donc d'après la partition du I.7

$$\boxed{M_\gamma \in E_1}$$

On en déduit que toute droite de  $Q$  passant par 0 contient un point et un seul de  $E_1$ . Avant ce point on est dans  $E_0$  et après dans  $E_\infty$ .

5. machine à calculer obligatoire .

On est sur la droite  $y = 0$ . On a déjà calculé  $(\sqrt{2}, 0) \in E_0$  et  $(2, 0) \in E_\infty$  donc  $\sqrt{2} < a < 2$ . On prend des valeurs  $x$  et on calcule la suite  $U_n(x, 0)$ . si on trouve deux termes consécutifs strictement inférieur à 1  $(x, 0) \in E_0$  et  $x < a$  et si on trouve deux termes  $> 1$  on a  $x > a$ .

Le graphe du II.1 nous donne mieux :  $\sqrt{2\sqrt{2}} \in E_\infty$  :  $a \in [\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}] = [1,41; 1,68]$ , donc  $a = 1,4$  ou  $1,5$  ou  $1,6$  par défaut

on trouve  $U_3(1,5;0) < 1$  et  $U_5(1,5;0) < 1$  donc  $1,5 < a$  puis  $U_4(1,6;0) > 1$  et  $U_5(1,6;0) > 1$  donc  $a < 1,6$

$$\boxed{a = 1,5 \text{ à } 0,1 \text{ par défaut}}$$