d'après le sujet de math 1 , centrale 2010 , PC
rappels

- arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0,\pi]$:
$$\forall x\in[0,\pi],\forall y\in[-1,1]\ ,\ y=\cos(x)\Leftrightarrow x=\arccos(y)$$
danger : l'équivalence est fausse si on sort du domaine : $x\in[0,\pi],y\in[-1,1]$
- arccos est continue sur $[-1,1]$, C^∞ sur $]-1,1[$ de dérivée : $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Sur $[-1,1],\cos(\arccos(x))=x$, mais la relation n'a pas de sens si $x\notin[-1,1]$
- Sur $[0,\pi],\arccos\left(\cos(x)\right)=x$, mais la relation est fausse si $x\notin[0,\pi]$: $\arccos\left(\cos\left(2\pi\right)\right)=0$ (le graphe de $\arccos\circ\cos$ est en dents de scie) .
- On a les relations sur $[-1,1]$: $\arcsin(x)+\arccos(x)=\pi/2$ et $\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$

1. Polynômes de Tchebychev

1. **A : définitions et récurrence**

 1.

  1. arccos est défini sur $[-1,1]$ à valeur dans $[0,\pi]$ et cos est défini sur $\mathbb{R}$. Par composition F_n est donc définie sur $[-1,1]$.
$$\boxed{D=[-1,1]}$$
  2. $\forall x\in[-1,1]$ on pose $y=\arccos(x)$. On a $\cos(y)=x$, et donc :
     - $F_0(x)=\cos(0)=1$
     - $F_1(x)=\cos(y)=x$
     - $F_2(x)=\cos(2y)=2\cos(y)^2-1=2x^2-1$
     - $$\begin{aligned}F_3(x)=\cos(3y)&=\cos(2y)\cos(y)-\sin(2y)\sin(y)=\left(2\cos(y)^2-1\right)\cos(y)-2\cos(y)\sin(y)^2\\&=\left(2\cos(y)^2-1\right)\cos(y)-2\cos(y)(1-\cos(y)^2)=4\cos(y)^3-3\cos(y)=4x^3-3x\end{aligned}$$

     $\boxed{F_3(x)=4x^3-3x}$

     On peut aussi s'inspirer de la suite : $\cos(3y)+\cos(y)=2\cos(y)\cos(2y)$ donc $F_3(x)=2xF_2(x)-F_1(x)$
  3.
     - Comme $\arccos(1)=0$ on a $F_n(1)=\cos(0)=1$
     - Comme $\arccos(0)=\dfrac{\pi}{2}$ on a $F_n(0)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } n=2k+1 \text{ est impair}\\(-1)^k \text{ si } n=2k \text{ est pair}\end{array}\right.$
     - Comme $\arccos(-1)=\pi$, on a $F_n(-1)=\cos(n\pi)=(-1)^n$.
  4. Pour $y\in[0,\pi]$, on a $\pi-y\in[0,\pi]$ et $\cos(\pi-y)=-\cos(y)$ donc $\arccos(-x)=\pi-\arccos(x)$.Ce qui donne :
$$F_n(-x)=\cos(n\pi-n\arccos(x))=(-1)^n\cos(\arccos(x))=(-1)^nF_n(x)$$
     ainsi $\boxed{F_n \text{ a la parité de } n}$.
 2. Par la formule usuelle $\cos(a)+\cos(b)=2\cos(\dfrac{a+b}{2})\cos(\dfrac{a-b}{2})$, on a :
$$\forall y\in[0,\pi]\cos((n+1)y)+\cos((n-1)y)=2\cos(y)\cos(ny)$$
 soit
$$\boxed{\forall x\in D\ ,\ F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x)=2xF_n(x).}$$
 3.
  - existence : Soit la suite définie sur $\mathbb{R}$ par $G_0(x)=1$ et $G_1(x)=x$ et pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\geq1$ $G_{n+1}(x)=2xG_n(x)-G_{n-1}(x)$. Pour $x\in D$, $G_0(x)=F_0(x)$ et $G_1(x)=F_1(x)$; de plus, (F_n) et (G_n) vérifient (sur D) la même relation de récurrence.
  Donc par récurrence double : si $\forall x\in D,(G_{n-1}(x)=F_{n-1}(x)$ et $G_n(x)=F_n(x))$ on a bien $\forall x\in D\ ,G_{n+1}(x)=F_{n+1}(x)$.
  Et donc par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N};\forall x\in D,G_n(x)=F_n(x)$.
  - Une nouvelle récurrence prouve alors la propriété suivante $\mathcal{H}(n)$: "G_n est polynômiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} si $n\geq1$".

- Comme $G_1(x) = x$ et $G_2(x) = 2x^2 - 1$, $\mathcal{H}(1)$ et $\mathcal{H}(2)$ sont bien vérifiées.
- Si on suppose $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n-1)$ vérifiées avec $n \geq 2$, G_{n+1} est la somme d'une fonction polynômiale de degré $n+1$ de coefficient dominant 2.2^{n-1} et d'une fonction polynômiale de degré $n-1 < n+1$ ce qui prouve que G_{n+1} est une fonction polynômiale de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n. On a ainsi montré par récurrence double que:

$$\boxed{G_n \text{ est polynômiale de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1}$$

  G_0 et de degré 0 et de coefficient dominant $1 \neq 2^{0-1}$

- unicité : si G_n et H_n sont deux fonctions polynômes solutions alors $\forall x \in D$, $H_n(x) = G_n(x)$. Tous les éléments de D sont racines de $G_n - H_n$. On a donc un polynôme ayant une infinité de racines : il est nul.
  remarque: l'unicité des polynômes vérifiant $G_0(x) = 1$ et $G_1(x) = x$ et $G_{n+1}(x) = 2xG_n(x) - G_{n-1}(x)$ ne suffit pas à prouver l'unicité du prolongement de F_n . Dans l'existence, on a en effet supposé que comme (F_n) vérifie $F_{n+1}(x) = 2xF_n(x) - F_{n-1}(x)$ sur D , le prolongement vérifie aussi cette relation sur $\mathbb{R}$, ce qui est une hypothèse raisonnable (un rêve) , mais peut-être pas la réalité.

4. avec une fonction récursive on peut écrire :

```
tchebychev:=n->
if n=0 then 1
elif n=1 then x
else sort(expand(2*x*tchebychev(n-1)-tchebychev(n-2)))
fi;
```

   `expand` permet de développer l'expression et `sort` de la trier par degré décroissant. Ils sont indispensable mais leur absence sera toléré à l'écrit car on ne peut pas voir à l'écran le résultat de la fonction)

   On peut améliorer le temps de calcul (en utilisant plus de mémoire) en utilisant une procédure et l'option `remember.`

   On peut aussi utiliser une procédure non récursive avec une boucle `for` et un tableau pour mémoriser :

```
tchebychev:=proc(n) local i,F;
    F[0]:=1;F[1]:=x;
    for i from 2 to n do F[n]:=sort(expand(2*x*F[n--1}-F[n-2])) od;

    F[n];
end;
```

   Et même sans tableau (économie de mémoire):

```
tchebychev:=proc(n) local i,Fa,Fb,Fc;
    Fa:=1;Fb:=x;
    if n=0 then 1

    elif n=1 then x
    else
        for i from 2 to n do Fc:=sort(expand(2*x*Fb-Fa));Fa:=Fb;Fb:=Fc od;

        Fc;
   fi;
end;
```

5. Que ce soit pour $n = 0$ ou pour $n \geq 1$, le choix du coefficient assure que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 .

   On multiplie par 2^{-1-n} la relation $\forall x \in \mathbb{R}; F_{n+2}(x) = 2xF_{n+1}(x) - F_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par leur expression en fonction des T_k on obtient:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - \frac{1}{4}T_n(x)}$$

B : étude des dérivées

1.
   1. toute fonction polynôme est C^∞ donc F_n est C^∞.

2. sur $]-1,1[$ $F_n(x)=\cos(n\arccos(x))$ est C^1 comme composée de $n\arccos$ C^1 sur $]-1,1[$ et cos est C^1 sur $\mathbb{R}$
Par dérivée d'une fonction composée , on a :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[, F_n'(x)=\frac{n\sin\left(n\arccos(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}}$$

2.

1. On pose toujours $y=\arccos(x)$. Le développement limité de cos donne l'équivalent classique : $1-\cos(y)\underset{y\to0^+}{\sim}\frac{y^2}{2}$, soit $2(1-x)\underset{y->0}{\sim}(\arccos x)^2$.
Par continuité de arccos en 1^- on a $2(1-x)\underset{x\to1^-}{\sim}(\arccos x)^2$ et donc en prenant la $\sqrt{\quad}$ des quantités positives $\sqrt{2(1-x)}\underset{x\to1}{\sim}\arccos(x)$

$$\boxed{\arccos(x)\sim_{1^-}\sqrt{2(1-x)}}$$

.

2. En 1^- on a donc les équivalents :

$$\begin{aligned}\frac{F_n(x)-F_n(1)}{x-1} &= \frac{\cos\left(n\arccos(x)\right)-1}{x-1}\\ &\sim \frac{-n^2\arccos(x)^2}{2(x-1)}\sim\frac{-n^2\left(2(1-x)\right)}{2(x-1)}\sim n^2\end{aligned}$$

La fonction F_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc $F_n'(1)=\lim_{x->1^-}(\frac{F_n(x)-F_n(1)}{x-1})=n^2$
Remarque : l'hypothèse C^1 est importante : A priori l'équivalent donne la limite à gauche donc la dérivée à gauche.
La parité donne $F_n'(-1)$

$$\boxed{F_n'(1)=n^2\ ,\ F_n'(-1)=(-1)^{n-1}n^2}$$

3. En dérivant sur $]-1,1[$ la relation :

$$\sqrt{1-x^2}F_n'(x)=n\sin\left(n\arccos(x)\right)$$

on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-1,1[\ ,\ \sqrt{1-x^2}F"_n(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}F'(x)=-n^2\frac{F_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

et donc en multipliant par $\sqrt{1-x^2}$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-1,1[\ ,\ (1-x^2)F_n''(x)-xF_n'(x)+n^2F_n(x)=0$$

remarque : Notez l'astuce de calcul qui évite de dériver un quotient.
En multipliant par 2^{1-n} on a donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-1,1[\ ,\ \ (1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

Le membre de gauche est une fonction polynôme ayant une infinité de racines , il est nul sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \ (1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0}$$

C : j'ai retiré à cette endroit une partie portant sur un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $(T_k)_{k=0}^n$ soit une famille orthogonale.

C: racines de T_n

1. Pour $x\in[-1,1]$ on prend $y=\arccos(x)$

$$T_n(x)=0\iff\cos(ny)=0\iff ny\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]\iff\exists k\in[[1,n]]\,,:y=\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}$$

La fonction cos étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on a n racines distinctes sur $]-1,1[$. Mais le polynôme est de degré n . Il admet donc exactement n racines complexes comptées avec leur multiplicité. On les a toutes et elles sont simples.

$$\boxed{\text{Les racines de } T_n \text{ sont simples et sont les } x_j=\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-j)\pi}{n})\ ,\ 1\le j\le n}$$

attention : le sujet impose l'ordre croissant des racines mais cos décroît.

2. On a toutes les racines complexes de T_n , on peut donc factoriser $T_n = \lambda \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$. et comme le coefficient dominant de T_n est 1:

$$T_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$$

L'expression proposée est alors une dérivée logarithmique.

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \left(\ln\left(|T_n|\right)\right)'(x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\ln\left(|x-x_j|\right)\right)' = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_j}$$

3.

1.

- si $j \neq k$, $Q_j(x_k) = \dfrac{T_n(x_k)}{x_k - x_j} = 0$
- par continuité en x_j on a :

$$Q_j(x_j) = \lim_{x->x_k}\left(\frac{T_n(x)}{x-x_j}\right) = \lim_{x->x_k}\left(\frac{T_n(x)-T_n(0)}{x-x_j}\right) = T_n'(x_j)$$

Or $T_n'(x) = 2^{1-n}F_n'(x) = 2^{1-n}\dfrac{n\sin\left(n\arccos(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$

Et comme $\arccos(x_j) = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{(n-j)\pi}{n}$, $\sin\left(n\arccos(x_j)\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+(n-j)\pi\right) = (-1)^{n-j}$

d'où :

$$\boxed{Q_j(x_j) = n2^{1-n}(-1)^{n-j}\frac{1}{\sqrt{1-x_j^2}}}$$

remarque : le calcul de $T_n'(x_j)$ n'est pas obligatoire ici . $T_n'(x_j)$ est une réponse valide. Mais il faudra faire le calcul avant la question 4.3

2. Pour $x \neq x_j$ $Q_j(x) = \prod_{k\neq j}(x-x_k)$. Les deux termes étant continus , l'égalité est vraie aussi en x_j . Donc $Q_j \in E_{n-1}$

4.

1. On a $Q(x_k) = \sum_{j=1}^{n}\dfrac{P(x_k)}{T'(x_j)}Q_j(x_k) = \sum_{j\neq k}0 + \dfrac{P(x_k)}{T_n'(x_k)}Q_k(x_k) = P(x_k)$, d'après les calculs de $Q_j(x_k)$ pour $j \neq k$ et $j = k$.
2. $P - Q$ est une fonction polynôme de degré $\leq n-1$ ayant au moins n racines distinctes. Donc $P - Q = \widetilde{0}$ et donc $P = Q$
3. On a donc :

$$\forall x \notin \{x_j\}\,, P(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P(x_j)}{T'(x_j)}\frac{T_n(x)}{x-x_j} = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sqrt{1-x_j^2}P(x_j)\frac{T_n(x)}{x-x_j}$$

en remplaçant $T_n'(x_j)$ par sa valeur trouvée en 3.1.

$$\boxed{\forall x \notin \{x_j\}\,, P(x) = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sqrt{1-x_j^2}P(x_j)\frac{T_n(x)}{x-x_j}}$$

D: majoration de $|T_n'|$

1. On étudie la fonction C^1 : $f(\theta) = \sin(n\theta) - n\sin(\theta)$ .on a $f'(\theta) = n\left(\cos(n\theta) - \cos(\theta)\right) = -2n\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\theta\right)\sin\left(\dfrac{n-1}{2}\theta\right)$
Sur $[0, \dfrac{\pi}{2n}]$, $0 \leq \dfrac{n+1}{2}\theta \leq \pi$ et $0 \leq \dfrac{n-1}{2}\theta \leq \pi$, les deux sin sont positifs et donc $f'(\theta) \leq 0$. f est donc décroissante et comme $f(0) = 0$:

$$\boxed{\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2n}], f(\theta) \leq 0}$$

2. 1. Par concavité de sin sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, la courbe est au dessus de la corde entre $(0,0)$ et $(\pi/2,1)$: $\forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\sin(\theta)\geq\frac{2}{\pi}\theta$

On peut aussi étudier les variations de $g(\theta)=\sin(\theta)-\frac{2}{\pi}\theta$ en utilisant $g(0)=g(\pi/2)=0$ et $g"(\theta)\leq 0$

3.

- Pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2n}]$, $\sin(n\theta)$ est positif et la majoration découle du 1 qui précède
- pour $\theta\in[\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2}]$: $n\sin(\theta)\geq n\frac{2}{\pi}\theta\geq n\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2n}=1$ et donc $|\sin(n\theta)|\leq 1\leq n\sin(\theta)$

$$\boxed{\forall\theta\in[0,\pi/2]\ ,\ |\sin(n\theta)|\leq n\sin(\theta)}$$

4. $|T_n|$ est une fonction paire. Il suffit d'étudier $|T_n'|$ sur $[0,1]$. Soit $y=\arccos(x)\in[0,\frac{\pi}{2}]$; compte-tenu de la formule donnant $F_n'(x)$ obtenue en question I.B, on obtient:

$$T_n'(x)=2^{1-n}F_n'(x)=\begin{cases}2^{1-n}\dfrac{n\sin(ny)}{\sin(y)} & \text{si } x\neq 1\\ 2^{1-n}n^2 & \text{si } x=1\end{cases}$$

La question précédente donne alors $\forall x\in[0,1],: |T_n'(x)|\leq 2^{1-n}n^2$avec égalité pour $x=1$.
$2^{1-n}n^2$ est donc un majorant de $|T_n'|$ sur $[0,1]$, et de plus ce majorant est atteint. C'est donc le maximum de la fonction et donc aussi la borne supérieure.

$$\boxed{\sup_{[-1,1]}(|T_n'|)=n^2.2^{1-n}}$$

E: Une inégalité intermédiaire

1. Pour $x\in[-1,1]$,$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$ (sin est positive sur $[0,\pi]$)
   Pour $x\in[x_1,x_n]$, $y=\arccos(x)\in[\frac{\pi}{2n},\pi-\frac{\pi}{2n}]$; Sur cet intervalle sin croît de $\sin(\frac{\pi}{2n})$ à 1 puis décroît de 1 à $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Le minimum de la fonction est donc $\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ on a donc :

$$\forall x\in[x_1,x_n],: \sqrt{1-x^2}=\sin(y)\geq\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

   On veut donc $\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\geq\frac{1}{n}$. C'est le résultat de I.D.2 pour $\theta=\frac{\pi}{2n}$.

$$\boxed{\forall x\in[x_1,x_n],: \sqrt{1-x^2}\geq\frac{1}{n}}$$

2. On sait que d'après I.C.2 $\frac{T_n'(x)}{T_n(x)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_j}$ .Et donc $\sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_j}=T_n'(x)$
   On a comme $x\geq x_n\geq x_j$

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_j}\right|=|T_n(x)|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|x-x_j|}=|T_n(x)|\sum\frac{1}{x-x_j}=\left|T_n(x).\sum\frac{1}{x-x_j}\right|=|T_n'|$$

   en utilisant 2 fois que la valeur absolue d'un réel positif est égal à ce réel.
   Comme on connaît par la question précédente le $\sup_{[-1,1]}(|T_n'|)$ on vérifie bien :

$$\boxed{\forall x\geq x_n\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_j}\right|\leq n^2 2^{1-n}}$$

3.

   1. On sépare les cas :
      - pour $x\in[x_{n,1},x_{n,n}]$. Par hypothèse, $|P(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .D'après la question précédente, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\leq n$ d'où $|P(x)|\leq n$.

- pour $x \geq x_n$,En utilisant l'expression de P obtenue en I.C.4 et $\left|P(x_j)\sqrt{1-x_j^2}\right| \leq 1$, on obtient:

$$|P(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_j}\right|$$

  et donc $|P(x)| \leq n$ par la majoration précédente.
- pour $x < x_1$, le calcul est sur le même principe tous les $x - x_j$ étant maintenant négatifs. On a un nombre pair de changement de signe donc c'est bon :

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_j}\right| = |T_n(x)|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|x-x_j|} = |T_n(x)|\sum\frac{-1}{x-x_j} = \left|T_n(x).\sum\frac{1}{x-x_j}\right| = |T_n'|$$

- $$\boxed{\forall x \in [-1,1], |P(x)| \leq n}$$

4. Si P est nul, c'est évident.

   Si P est non nul on pose $Q = \dfrac{P}{\sup_{x\in[-1,1]}\left(\sqrt{1-x^2}|P(x)|\right)}$ (dénominateur non nul) on a $\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left(\sqrt{1-x^2}|Q(x)|\right) = 1$ on peut appliquer la question précédente : $\forall x \in [-1,1], |Q(x)| \leq n$
   et donc en multipliant par le dénominateur :

$$\forall x \in [-1,1], |P(x)| \leq n \sup_{x\in[-1,1]}\left(\sqrt{1-x^2}|P(x)|\right)$$

   On a trouvé un majorant et donc

$$\sup_{x\in[-1,1]}(|P(x)|) \leq n \sup_{x\in[-1,1]}\left(\sqrt{1-x^2}|P(x)|\right)$$

$$\boxed{\forall P \in E_{n-1}\ ,\ \|P(x)\|_\infty \leq n\left\|\sqrt{1-x^2}P(x)\right\|_\infty}$$

2. Inégalités de Markov

1. **A: polynôme de seconde espèce**

   1. On connaît les polynômes F_k qui vérifient sur $[-1,1]$, $F_k(x) = \cos(n\arccos(x))$ et on sait que sur $]-1,1[$ $F_n'(x) = \dfrac{n\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$. En prenant $\theta = \arccos(x)$ on a donc

$$F_n'(\cos(\theta)) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

   donc $\sin(n\theta) = \dfrac{F_n'(\cos(\theta)}{n}\sin(\theta)$.
   D'après le domaine de arccos le calcul est valide pour $\theta \in]0,\pi[$. Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, les deux membres sont nuls , le résultat est valide sur $[0,\pi]$. Par imparité et $2\pi-$ périodicité des 2 membres , on en déduit que l'égalité est vraie sur $\mathbb{R}$.
   Enfin par dérivation d'un polynôme de degré n , $B_n = \dfrac{F_n'}{n}$ est de degré $n-1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \exists B_n \in E_{n-1}\ ,\ \forall\theta \in \mathbb{R}\ ,\ \sin(n\theta) = \sin(\theta)\,B_n(\cos(\theta))}$$

B : inégalité de Markov

1. Etudions chaque terme de $T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta)$:
   - $a_0 - a_0 = 0$
   - $\cos(k(\theta_0+\theta)) - \cos(k(\theta_0-\theta)) = -2\sin(k\theta_0)\sin(k\theta) = -2\sin(k\theta_0)\,B_k(\cos(\theta))\sin(\theta)$
   - $\sin(k(\theta_0+\theta)) - \sin(k(\theta_0-\theta)) = 2\cos(k\theta_0)\sin(k\theta) = 2\cos(k\theta_0)\,B_k(\cos(\theta))\sin(\theta)$

En regroupant On a $P = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta_0)B_k - \sin(k\theta_0)B_k$, qui , d'après le degré de B_k est bien de degré $\leq n-1$

En posant $x = \cos(\theta)$ on a $\sin(\theta)P(\cos(\theta)) = \sqrt{1-x^2}P(x)$. Donc d'après l'inégalité du I.E.4.)

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[-11]} (|P(x)|) &\leq n \sup_{x\in[-1,1]} \left(\left|\sqrt{1-x^2}P(x)\right|\right) \\ &= n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} (|\sin(\theta)\, P(\cos(\theta)|) \leq \frac{n}{2} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} (|T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta)|) \end{aligned}$$

mais si θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta_0+\theta$ et $\theta_0-\theta$ décrivent $\mathbb{R}$ donc

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} (|T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta)|) \leq 2 \sup_{\theta\in\mathbb{R}} (|T(\theta)|)$$

on vérifie bien :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} (T(\theta))}$$

2. En faisant tendre θ vers 0 on constate que

$$\begin{aligned} \frac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta))}{\sin(\theta)} &\sim \frac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta))}{\theta} \\ &= \frac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0))}{\theta} + \frac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0))}{\theta} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\theta->0} \left(\frac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta))}{\sin(\theta)}\right) = 2T'(\theta_0)$$

Or P est continue , et donc $T'(\theta_0) = P(1)$.
D'où

$$|T'(\theta_0)| = |P(1)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$$

La majoration est vrai pur tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|}$$

3. On pose $\theta = \arccos(x)$ et $T(\theta) = P(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cos(\theta)^k$.

On peut appliquer la question précédente car T peut se mettre sous la forme $a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$ en linéarisant $\cos(\theta)^k$

$$\begin{aligned} \cos(\theta)^k &= \frac{1}{2^k}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} e^{i(k-j)\theta} e^{-i(j)\theta} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} e^{i(k-2j)\theta} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\cos((k-2j)\theta) + i \sin((k-2j)\theta)) \end{aligned}$$

en regroupant le terme pour j et $k-j$, les parties imaginaires se simplifient car $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$.

On peut donc utiliser le résultat précédent.: $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$.

Or $T'(\theta) = -\sin(\theta)P'(\cos(\theta)) = -\sqrt{1-x^2}P'(x)$ et donc

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left(|\sqrt{1-x^2}P'(x)|\right) \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)| = n \sup_{x\in[-1,1]} (|P(x)|)$$

Or P' est élément de E_{n-1} d'où par l'inégalité de I.E.4 : :

$$\sup_{x\in[-1,1]} (|P'(x)|) \leq n \sup_{x\in[-1,1]} \left(\sqrt{1-x^2}|P'(x)|\right) \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} (|P(x)|)$$

$$\boxed{\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty}$$

3. Approximation polynômiale

1. **A: sur les suites à décroissance rapide**

   1. $\mathcal{S}$ est un sous ensemble de l'espace vectoriel des suites réelles;$\mathcal{S}$ est non vide (la suite nulle est dans $\mathcal{S}$), et $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire car toute combinaison linéaire de suite bornée est bornée:
   si $\forall n, \left|n^j u_n\right| \leq U_j$ et $\left|n^j u_n\right| \leq V_j$ alors $\forall n, \left|n^j\left(\lambda u_n+\mu\right)\right| \leq |\lambda| U_j+|\mu| V_j$

   $$\boxed{\mathcal{S} \text{ est un espace vectoriel}}$$

   2. Soit $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire $n^k \alpha_n=\dfrac{1}{n}\left(n^{k+1} \alpha_n\right)$. Cette suite tend vers 0 comme produit d'une suite bornée(car $k+1 \in \mathbb{N}$) et d'une suite de limite nulle.

   $$\boxed{(\alpha_n) \in \mathcal{S} \Rightarrow \forall\ k{\in}\mathbb{N}\ ,\ \alpha_n \ll \frac{1}{n^k}}$$

   3.
      1. Soit $j \in \mathbb{N}$, on a $n^2\left(\left|n^j \alpha_n\right|\right)=\left|n^{j+2} \alpha_n\right|$ de limite nulle d'après la question précédente avec $k=j+2$. et donc

      $$\boxed{\sum n^j \alpha_n \text{ converge absolument}}$$

      2. Soit $k \geq 2$. La fonction $t \rightarrow \dfrac{1}{t^k}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et donc pour $p \geq 2$: $\dfrac{1}{p^k} \leq \displaystyle\int_{p-1}^p \frac{dt}{t^k}=\frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{p^{k-1}}-\frac{1}{(p-1)^{k-1}}\right)$.
      Or la première série converge car $k \geq 2$, et la seconde converge car la suite $\left(\dfrac{1}{p^{k-1}}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.
      De plus pour $n \geq 1$ et $p \geq n+1$ on a bien : $p \geq 2$ et donc :

      $$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{1-k} \sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^{k-1}}-\frac{1}{(p-1)^{k-1}}\right)=\frac{1}{1-k}\left(\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{p^{k-1}}\right)-\frac{1}{n^{k-1}}\right)$$

      $$\boxed{\forall k \geq 2\ ,\quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}}}$$

      3. Soit $k \geq 2$, la suite $\left(p^{j+k} \alpha_p\right)$ est bornée . Soit $M=\sup\left(\left|p^{j+k} \alpha_p\right|\right)$ on a alors $\left|p^j \alpha_p\right| \leq \dfrac{1}{p^k}$ Donc avec la majoration précédente :

      $$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^j \alpha_p\right| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}}$$

      ce qui prouve que $n^{k-1} R_n(j)$ est bornée . Et donc par changement d'indice : $\forall K \geq 1\ n^K R_n(j)$ est bornée. Enfin comme $n^0 \leq n^1$ on a aussi $n^0 R_n(j)$ bornée.

      $$\boxed{(\alpha_n) \in \mathcal{S} \Rightarrow (\forall j \in \mathbb{N}\ ,\ R_n(j) \in \mathcal{S})}$$

   B: une fonction auxiliaire :

   1. Pour $x \in[-1,1]$, on a $|F_n(x)|=|\cos(n \arccos x)| \leq 1$ donc :

   $$\forall x \in[-1,1] ;|\alpha_n F_n(x)| \leq|\alpha_n|$$

   La série $\sum \alpha_n$ est absolument convergente (III.A.3 avec $j=0$),

   $$\boxed{\text{la série } \sum \alpha_n F_n \text{ converge normalement sur } [-1,1]}$$

   2. On cherche à utiliser le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.
      - <u>Les fonctions F_n sont de classe C^{∞} sur $[-1,1]$.</u>

- comme F_n est élément de E_n,pour tout entier naturel k , $F_n^{(k)}$ est encore élément de E_n donc par l'inégalité de Markov démontrée en partie II.,
$$\left\|F_n^{(k+1)}\right\|_\infty \leq n^2 \left\|F_n^{(k)}\right\|_\infty$$
et donc par récurrence simple :
$$\left\|F_n^{(k)}\right\|_\infty \leq n^{2k} \|F_n\|_\infty$$
et donc :
$$\forall x \in [-1,1], : |\alpha_n F_n^{(k)}(x)| \leq |\alpha_n| n^{2k}$$
La série $\sum |\alpha_n| n^{2k}$ est convergente, pour tout k (III.A.3 avec $j = 2k$) et donc :
la série $\sum_n \alpha_n F_n^{(k)}$ converge normalement de sur $[-1,1]$.

On peut se limiter à $k \leq n$ puisque $F_n^{(k)} = 0$ si $k > n$
- Par théorème, f est C^∞ et ses dérivées sont obtenues par dérivation terme à terme.
$$\boxed{f \in C^\infty([-1,1])}$$

3. $\sum_{p=0}^{n} \alpha_p F_p$ est élément de V_n, donc par définition de la borne inférieure:
$$d(f,V_n) \leq \left\|f - \sum_{p=0}^{n} \alpha_p F_p\right\|_\infty \leq \left\|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p F_p\right\|$$
En utilisant de nouveau : $\forall x \in [-1,1]$, $|F_n| \leq 1$ on a :
$$d(f,V_n) \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} |\alpha_p| = u_n$$
La suite $(\alpha_n)_n$ est élément de $\mathcal{S}$ donc aussi la suite $(|\alpha_n|)_n$ et donc (III.A.3 pour $j = 0$) , la suite $(u_n)_n$ est élément de $\mathcal{S}$.
Et donc comme pour tout entier k, $n^k d(f,V_n) \leq n^k u_n$
$$\boxed{\text{la suite } (d(f,V_n))_n \text{ est à décroissance rapide}}$$

C:Le théorème d'approximation :

On introduit les coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$

1. $\widetilde{f}$ est C^∞ comme composée de fonctions indéfiniment dérivables.
On sait que pour une fonction $C^1, c_n(f') = inc_n(f)$.
On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n^k |c_n(f)| = \left|c_n\left(f^{(k)}\right)\right|$. Et donc comme $\lim \left(c_n\left(f(^{)k}\right)\right) = 0$ (car $f^{(k)}$ est continue) la suite $n^k c_n(f)$ est bornée.
Et donc les deux suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ sont à décroissance rapide.
La suite $(b_n(f))$ est même nulle car $\widetilde{f}$ est paire.
2. $\widetilde{f}$ est de classe C^1, donc d'après le théorème de convergence normale des séries de Fourier, la série de Fourier de $\widetilde{f}$ converge normalement vers $\widetilde{f}$.
3. D'après cette convergence :
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ , \ \widetilde{f}(\theta) = f(\cos(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\widetilde{f}) \cos(n\theta)$$
en posant $\theta = \arccos(x)$ on a :
$$\forall x \in [-1,1], : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\widetilde{f}) F_n(x)$$
D'après la question III.C.1, la suite $\alpha_n(f) = a_n(\widetilde{f})$ convient donc: $\alpha_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\theta))\cos(n\theta)d\theta$

4. La suite $P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} a_n(f)F_n(x)$ d'après la partie III.B)

D:Réciproque :

1. Par définition de la borne inférieure : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in V_n$ $d(f,V_n) \leq \|f-P\|_\infty \leq d(f,V_n)+\varepsilon$. On choisit pour ε une suite à décroissance rapide . Par exemple
$\varepsilon = e^{-n}$ On a donc $\forall n$, $\exists p_n \in V_n, : d(f,V_n) \leq \|f-P_n\|_\infty \leq d(f,V_n)+e^{-n}$. Les deux suites $(d(f,V_n))$ et $\left(e^{-n}\right)$ sont à décroissance rapide , et donc aussi leur somme (structure d'espace vectoriel de $\mathcal{S}$) . La suite $(\|f-P_n\|_\infty)_n$ est à décroissance rapide et p_n est bien de degré inférieur ou égal à n.

2.
    1. On a par parité :
    $$a_k\left(\widetilde{F_j}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(j \arccos\left(\cos(t)\right)\right)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(nar\cos\left(\cos(t)\right)\right)\cos(kt)dt$$
    sur $[0,\pi]$, $\arccos\left(\cos(t)\right) = t$ (*Danger : c'est faux sur* $[-\pi,\pi]$ *, d'où l'utilisation de la parité*)
    Et donc
    $$a_k\left(\widetilde{F_j}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(jt)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos((j+k)t)+\cos((j-k)t)}{2}dt$$
    comme $j+k$ et $j-k$ sont non nuls :
    $$a_k\left(\widetilde{F_j}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(j+k)t)}{j+k} + \frac{\sin(j-k)t)}{j-k}\right]_0^{\pi} = 0$$
    2. Les $(F_j)_{j=0}^{k-1}$ forme une famille de polynômes étagées en degré $(d^\circ(F_j) = j)$. C'est donc une base de E_{k-1}. Tout polynôme $P \in E_{k-1}$ se décompose $P = \sum_{j=0}^{k-1} x_j F_j$.
    Par linéarité de l'intégrale on a donc $a_k\left(\widetilde{P}\right) = 0$
    $$\boxed{\forall P \in E_{k-1}, a_k(\widetilde{f}) = a_k(\widetilde{f-P})}$$
    3. En utilisant la suite p_n construite en III.D.1, on obtient que $a_n(\widetilde{f}) = a_n(\widetilde{f-p_{n-1}})$. Or par l'inégalité de la moyenne, on a donc
    $$|a_n(\widetilde{f})| = |a_n(\widetilde{f-p_{n-1}})| \leq \frac{2\pi\,\|f-p_{n-1}\|_\infty}{\pi} = 2\,\|f-p_{n-1}\|_\infty$$
    Or si la suite (α_n) est à décroissance rapide , la suite (α_{n-1}) l'est aussi : pour $n \geq 1$: $n^j\alpha_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)(n-1)^j\alpha_{n-1} \leq 2$
    $$\boxed{(a_n(f)) \text{ est à décroissance rapide}}$$
    4. Soit $g = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\widetilde{f})T_n$ fonction bien définie et de classe C^∞d'après III.B.. En introduisant une fonction $\widetilde{g}$ comme en III.C, on obtient alors par le résultat de III.C.3 que
    $$\forall n, \quad a_n(\widetilde{f}) = a_n(\widetilde{g}) \text{ et } b_n(\widetilde{f}) = b_n(\widetilde{g}) = 0$$
    $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ ont les mêmes coefficients de Fourier , donc sont égales. d'où $f = g$ ce qui prouve bien que $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty}$.