objectif:
Le but du problème consiste à étudier l'approximation uniforme de fonctions C^∞ sur un segment.
Dans le cas de $I = [-1, 1]$ on établira le théorème :
"toute fonction continue sur $[-1, 1]$ y est C^∞ si et seulement si il existe une suite de polynôme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

- $d^\circ(P_n) \leq n$
- $\alpha_n = \sup\limits_{[-1,1]} (f - P_n) << 1/n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ "

Dans la première partie on étudie les polynômes de Tchebychev.
Dans la seconde partie on va majorer la norme infinie de la dérivée d'un polynôme en fonction de celle du polynôme.
La partie 3 utilisera les majoration précédentes pour étudier l'approximation uniforme.
notations:

- Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ on note $C^k([-1, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe C^k sur $[-1, 1]$.
- Pour tout fonction $f \in C^0([-1, 1])$ on note $\|f\|_\infty = \|f(x)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} (|f(x)|)$.

  C'est une norme sur $C^0([-1, 1])$.

- On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le sous espace vectoriel des restrictions à $[-1, 1]$ des éléments de $E_{n.}$
- Pour tout $f \in C^0([-1, 1])$, on note $d(f, V_n)$ la distance de f au sous espace V_n :

$$d(f, V_n) = \inf_{P\in V_n} (\|f - P\|)$$

- On dira qu'une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est à décroissance rapide si pour tout entier k la suite $\left(n^k\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites à décroissance rapide.

Partie I : polynômes de Tchebychev

I.A) définition et récurrence
pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $F_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1.
    1. Déterminer le domaine de définition D des F_n.
    2. Pour tout $x \in D$, calculer $F_0(x), F_1(x), F_2(x)$ et $F_3(x)$.
    3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $F_n(1), F_n(0)$ et $F_n(-1)$.
    4. Etudier la parité de F_n en fonction de n.

2. Exprimer $F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)$ en fonction de x et $F_n(x)$.

3. En déduire que F_n se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une unique fonction polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

   Dans la suite on notera aussi F_n la fonction prolongée.

4. Ecrire, en utilisant le langage de programmation associé à l'un des logiciels de calcul formel au programme, une fonction **Tchebychev** qui prend en argument un entier **n** et qui renvoie l'expression de $F_n(x)$.

   Dans toute la suite du problème on pose

$$T_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ T_n(x) = 2^{1-n} F_n(x)$$

5.

   Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

   Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+2}(x) = axT_{n+1}(x) + bT_n(x)$$

I.B) étude des dérivées

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

   1. Montrer que la fonction F_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   2. Pour $x \in]-1, 1[$ donner une expression simple de $F_n'(x)$. On justifiera soigneusement le calcul.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

   1. Montrer que :

$$\arccos(x) \sim_{1^-} \sqrt{2(1-x)}$$

   2. En déduire le calcul de $F_n'(1)$ et de $F_n'(-1)$.

3. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \ , \ \left(1 - x^2\right) T"_n(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

   On pourra commencer par prendre $x \in]-1, 1[$.

I.C) racines de T_n
Dans toute cette question et ljusqu'à la fin du I on prend $n \in \mathbb{N}^*$

1. Déterminer les racines de T_n . (On montrera que toutes les racines (complexes) de T_n sont éléments de $]-1, 1[$, qu'elles sont simples et on les calculera).

   On note $(x_j)_{j=1}^n$ les racines de T_n par ordre croissant : $-1 < x_1 < x_2 \cdots < x_n < 1$.

2. Montrer que pour $x \notin \{x_j\}$

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$$

3. Pour tout $j \in [[1, n]]$ on considère la fonction Q_j $\left\{ \begin{array}{c} \text{continue sur } \mathbb{R} \\ \text{vérifiant : } \forall x \neq x_j, Q_j(x) = \dfrac{T_n(x)}{x - x_j} \end{array} \right.$.

1. Que vaut $Q_j(x_k)$ si $k \neq j$? Que vaut $Q_j(x_j)$.
2. Montrer que $Q_j \in E_{n-1}$.

4. Soit $P \in E_{n-1}$. On définit le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{P(x_j)}{T'(x_j)} Q_j$.

   1. Pour $k \in [[1,n]]$, calculer $Q(x_k)$.
   2. En déduire $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q(x)$.
   3. En déduire :
$$\forall x \notin \{x_j\}\,, P(x) = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sqrt{1-x_j^2} P(x_j) \frac{T_n(x)}{x-x_j}$$

ID) maximum de $|T_n'|$.

1. Montrer que pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$ on a $\sin(n\theta) \leq n \sin(\theta)$.
2. Montrer que pour $\theta \in [0, \pi/2]$ on a $\sin(\theta) \geq \dfrac{2}{\pi}\theta$.
3. Montrer que pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$.

   On pourra distinguer les cas $\theta \leq \dfrac{\pi}{2n}$ et $\theta \geq \dfrac{\pi}{2n}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sup_{x \in [-1,1]} |T_n'(x)| = n^2 2^{1-n}$$

I E)une inégalité intermédiaire :

1. Montrer que pour tout $x \in [x_1, x_n]$
$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n}$$
2. Montrer que pour tout $x \in [x_n, 1]$
$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{T_n(x)}{x-x_j} \right| \leq n^2 2^{1-n}$$
3. Soit $P \in E_{n-1}$ tel que
$$\left\| P(x)\sqrt{1-x^2} \right\|_\infty \leq 1$$
   Montrer que :
$$\|P(x)\|_\infty \leq n$$
   (on distinguera les cas : $x \in [x_1, x_n], x \in [-1, x_1], x \in [x_n, 1]$
4. En déduire que pour tout polynôme $P \in E_{n-1}$:
$$\|P(x)\|_\infty \leq n \left\| P(x)\sqrt{1-x^2} \right\|_\infty$$

Partie II : inégalité de Markov

II.A) : **polynômes de Tchebychev de seconde espèce:**
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.Montrer qu'il existe un polynôme B_k de degré $k-1$ et qui vérifie

$$\forall \theta \ \in \ \mathbb{R} \ , \ \sin(k\theta) = B_k(\cos(\theta))\sin(\theta)$$

II.B) **inégalité de Markov**
A toute famille $(a_0, a_{1,} \cdots a_n, b_1, \cdots b_n)$ de réels on associe le polynôme trigonométrique :

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

1. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

   Montrer qu'il existe un polynôme $P \in E_{n-1}$ vérifiant :

   $$\forall \theta \in \mathbb{R} : T(\theta_0 + \theta) - T(\theta_0 - \theta) = 2\sin(\theta) P(\cos(\theta))$$

   Montrer que

   $$\|P\|_\infty \leq n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (T(\theta))$$

2. Montrer :

   $$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} (|T'(\theta)|) \leq n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (|T(\theta)|)$$

3. Soit $P \in E_n$. En prenant $T(\theta) = P(\cos(\theta))$ montrer :

   $$\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty$$

Partie III : approximation polynômiale

1. III.A: **sur les suites à décroissance rapide**

   1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
   2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\ltimes} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \ll \dfrac{1}{n^k}$.
   3. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ et $j \in \mathbb{N}$
      1. Montrer que la série $\sum n^j \alpha_n$ converge absolument.
      2. Montrer que pourtout $k \geq 2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}$
      3. On note $R_n(j) = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^j \alpha_j$

         Montrer que la suite $(R_n(j))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$

   III.**B: une fonction auxiliaire**

   On reprend les polynômes F_n de la première partie.

   Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$

   1. Montrer que la série $\sum \alpha_n F_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

2. On note $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n$.
3. Montrer que $f \in C^\infty([-1,1])$.
4. Montrer que la suite $(d(f, V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

Pour toute fonction $h \in C^0([-1,1])$ on définit la fonction $\widetilde{h} : \theta \to h(\cos(\theta))$.
On rappelle que les coefficients de Fourier de $\widetilde{h}$ sont donnés par les formules :

$$a_0\left(\widetilde{h}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n\left(\widetilde{h}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t)\cos(nt)dt \ , \ b_n\left(\widetilde{h}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t)\sin(nt)dt$$

1. III.**C: Le théorème d'approximation.**

   Soit $f \in C^\infty([-1,1])$

   1. Montrer que la suite $\left(a_n(\widetilde{f})\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.

      Que peut-on dire de la suite $\left(b_n(\widetilde{f})\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
   2. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   3. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ à décroissance rapide telle que

      $$\forall x \in [-1,1] \ , \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(f) F_n$$

      Donner une expression de $\alpha_n(f)$ en fonction de n et f .
   4. En déduire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes de degré n et telle que

      $$\sup_{[-1,1]} (f - P_n) << 1/n^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

   II.**D: Réciproque:**

   Soit $f \in C^0([-1,1])$ telle que la suite $(d(f, V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit à décroissance rapide.

   1. Montrer qu'on peut construire une suite de fonctions polynômes telle que :
      - pour tout entier n , $d^\circ(p_n) \leq n$.
      - $(\|f - P_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.
   2.
      1. Soient $0 \leq j < k$ deux entiers calculer $\mathrm{a}_k\left(\widetilde{F_j}\right)$
      2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour $P \in E_{k-1}$: $a_k\left(\widetilde{f}\right) = a_k(\widetilde{f - P})$.
      3. En déduire que la suite $\left(a_n(\widetilde{f})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.
      4. Montrer que f est de classe C^∞.

FIN