On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta \mathrm{P}(X) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout entier naturel k, on pose $\Delta^k = \mathrm{Id}$ si $k = 0$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \ldots \circ \Delta$ (k fois) si $k \geq 1$.
Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

■ Partie I : Etude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall\, n \geq 1, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \ldots (X-n+1) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k).$$

1°) *La famille* (P_n) *forme une base de* $\mathbb{R}[X]$

a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

c) Etablir, pour tout entier naturel k, que $P_n(k)$ et que $P_n(-k)$ sont des entiers.

d) En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, que les coefficients de P dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des nombres entiers si et seulement si on a : $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.

2°) *Etude de l'endomorphisme* Δ

a) Etablir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer ΔP_0, puis $\Delta \mathrm{P}_{n+1}$ en fonction de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) On considère un polynôme non nul P de degré d.
Préciser le degré du polynôme ΔP et donner $\Delta^{d+1} P$.

d) Préciser le noyau de Δ, puis étudier s'il est injectif et s'il est surjectif.

3°) *Expression d'un polynôme dans la base* (P_n) *de* $\mathbb{R}[X]$

a) Calculer $\Delta^k P_n$ et en déduire que $\Delta^k P_n(0) = \delta_{k,n}$ où $\delta_{k,n} = 1$ si $k = n$, $\delta_{k,n} = 0$ si $k \neq n$.

b) En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule suivante :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0)\, P_n(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n P(0)}{n!} X(X-1) \ldots (X-n+1).$$

4°) *Etude de l'endomorphisme* Δ_d *induit par* Δ *sur* $\mathbb{R}_d[X]$

On désigne par $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq d$ (où $d \geq 1$) et on désigne par Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$ induit par Δ, c'est à dire par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_d[X], \quad \Delta_d P(X) = P(X+1) - P(X).$$

a) Ecrire les matrices de Δ_d dans les bases $(P_0, P_1, \ldots, P_d)$ et $\left(1, X, \ldots, X^d\right)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ_d.
L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable? Que dire de l'endomorphisme Δ_d^{d+1}?

■ Partie II : Approximation de dérivées $n^{\text{èmes}}$ par différences finies

5°) *Puissances de l'endomorphisme* Δ
Etablir la formule suivante pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n P(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

6°) *Application au calcul de différentes sommes*
a) Préciser le coefficient dominant du polynôme X^n dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.
En déduire la valeur de $\Delta^n X^n$, puis établir la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

b) Démontrer la formule suivante pour $0 \leq k < n$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0.$$

7°) *Approximation d'une dérivée $n^{\text{ème}}$ par différences finies*
On considère une fonction f de classe C^m définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, puis un point $a \in \mathbb{R}$ et un entier naturel n compris entre 1 et m ($1 \leq n \leq m$), et on pose alors :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^*, \quad A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a + j\,h).$$

a) Exprimer $f(a+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre n en a.
Quelles formules en déduit-on pour $f(a + j\,h)$, où $0 \leq j \leq n$, en changeant h en $j\,h$?
b) En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0, et préciser les coefficients de h^j $(0 \leq j < n)$ et de h^n dans celui-ci.
Quelle est la limite de $A_n(h)$ quand h tend vers 0 ?

■ Partie III : Calcul de la somme des puissances des *n* premiers entiers

8°) *Etude de séries télescopiques*
a) Etablir la formule suivante pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = \Delta Q$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} R(k) = Q(p+1) - Q(0).$$

b) Exprimer les polynômes X, X^2 et X^3 dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
En déduire des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 tels qu'on ait $\Delta Q_1(X) = X$, $\Delta Q_2 = X^2$, $\Delta Q_3 = X^3$.
c) Donner alors l'expression *factorisée* des sommes $\sum_{k=0}^{k=p} k$, $\sum_{k=0}^{k=p} k^2$, $\sum_{k=0}^{k=p} k^3$ où $p \in \mathbb{N}$.

9°) *Recherche d'une suite de polynômes* (B_n) *tels que* $\Delta B_{n+1} = X^n$

Afin de généraliser le calcul précédent, on recherche une suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 1}$ tels qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\Delta B_{n+1} = X^n$.

a) Montrer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule $(\Delta P)' = \Delta(P')$.

b) Etablir, si une telle suite de polynômes (B_n) existe, qu'on a :

- $\forall\, n \geq 1,\ \ B_{n+1}' - n\,B_n \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.
- $\forall\, n \geq 1,\ \ B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$.
- le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

c) Inversement, établir par récurrence qu'une suite (B_n) satisfaisant ces 3 conditions vérifie $\Delta B_{n+1} = X^n$, et qu'on a alors $\sum_{k=0}^{k=p} k^n = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)$ pour tout entier naturel p.

On recherche en particulier une suite de polynômes (B_n) vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall\, n \geq 1,\ \ B_{n+1}' = n\,B_n$.
2. $\forall\, n \geq 1,\ \ B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$.
3. le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

10°) *Existence, unicité et construction de la suite* (B_n)

a) Vérifier que les conditions 1, 2, 3 sont équivalentes aux conditions suivantes :

1. $\forall\, n \geq 1,\ \ B_{n+1}' = n\,B_n$.
2. $\forall\, n \geq 1,\ \ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

b) Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 et retrouver ainsi $\sum_{k=0}^{k=p} k$, $\sum_{k=0}^{k=p} k^2$, $\sum_{k=0}^{k=p} k^3$.

c) Etablir alors l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie les trois conditions 1, 2, 3 définies ci-dessus, et montrer qu'on a : $\forall\, n \geq 1$, $B_n \in \mathbb{Q}[X]$.

d) En déduire un algorithme d'obtention des polynômes B_k pour $1 \leq k \leq n$, où n est donné.

Corrigé de l'épreuve I

L'opérateur de différences finies Δ

■ Partie I : Etude de l'endomorphisme Δ

1°)a) La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre puisqu'elle est composée de polynômes dont les degrés sont 0, 1, 2, ... , n. Comme c'est une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la dimension est $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1°)b) La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre puisqu'elle est composée de polynômes dont les degrés sont 0, 1, 2, ... , n, ... Pour établir qu'elle est génératrice, considérons un polynôme P dont nous notons n le degré : il appartient donc à $\mathbb{R}_n[X]$ dont $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base. Ainsi donc, il existe des réels $p_0, p_1, \dots, p_n$ tels que $P = p_0\, P_0 + p_1\, P_1 + \dots + p_n\, P_n$.
Il en résulte que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre et génératrice, et c'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

1°)c) Pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, on a $P_n(k) = 0$, et pour $k \geq n$, on a :

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}\, k(k-1)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{n!\,(k-n)!} = \binom{k}{n} \in \mathbb{N}.$$

De même, on obtient :

$$P_n(-k) = \frac{1}{n!}\,(-k)\,(-k-1)\dots(-k-n+1) = \frac{(-1)^n\,(k+n-1)!}{n!\,(k-1)!} = (-1)^n \binom{k+n-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

1°)d) Puisque les polynômes P_n sont à valeurs entières sur les entiers, il est clair que tout polynôme P à coefficients entiers dans la base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières sur les entiers. On étudie maintenant la réciproque de cette propriété et on considère donc un polynôme P s'écrivant $P = p_0\, P_0 + p_1\, P_1 + \dots + p_d\, P_d$ et tel que $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$.
En faisant $x = 0$, qui est racine de $P_1, \dots, P_d$, on obtient $p_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$.
Supposons donc $p_0, \dots, p_{n-1}$ entiers et montrons que p_n est aussi entier.
En faisant $x = n$, qui est racine de $P_{n+1}, \dots, P_d$, on obtient la relation suivante :

$$p_0\, P_0(n) + \dots + p_{n-1}\, P_{n-1}(n) + p_n\, P_n(n) = P(n) \in \mathbb{Z}.$$

Comme on a $P_n(n) = 1$, on en déduit $p_n = P(n) - (p_0\, P_0(n) + \dots + p_{n-1}\, P_{n-1}(n)) \in \mathbb{Z}$.
On a ainsi prouvé par récurrence que les coefficients de P dans la base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont entiers.

2°)a) Il est clair que $\Delta : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est linéaire car on a pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta(\lambda\, P + \mu\, Q)\,(X) = (\lambda\, P + \mu\, Q)\,(X+1) - (\lambda\, P + \mu\, Q)\,(X).$$

Ce qui donne, d'après les règles de calcul sur les polynômes :

$$\Delta(\lambda\, P + \mu\, Q)\,(X) = \lambda\,(P(X+1) - P(X)) + \mu\,(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\,\Delta P(X) + \mu\,\Delta Q\,(X).$$

2°)b) Il est clair que $\Delta P_0 = 0$ et que $\Delta P_{n+1} = P_n$ car :

$$\Delta \mathrm{P}_{n+1}(X) = \frac{1}{(n+1)!}[(X+1)\,X \dots (X-n+1) - X(X-1)\dots(X-n)].$$

En factorisant, on en déduit le résultat voulu :

$$\Delta \mathrm{P}_{n+1}(X) = \frac{(X+1)-(X-n)}{(n+1)!}\,(X+1)\,X \dots (X-n+1) = \frac{1}{n!}\,X(X-1)\dots(X-n+1).$$

2°)c) Soit un polynôme de degré d, qui s'écrit $P = p_0\,P_0 + p_1\,P_1 + \ \dots\ + p_d\,P_d$ ($p_d \neq 0$).
D'après ce qui précède, on a $\Delta P = p_1\,P_0 + p_2\,P_1 + \ \dots\ + p_d\,P_{d-1}$.
Il en résulte que ΔP est de degré exactement $d - 1 = \mathrm{d}°P - 1$.
Comme Δ abaisse le degré d'une unité, $\Delta^d\,P$ est par conséquent un polynôme constant dont l'image par Δ est donc nulle, ce qui donne $\Delta^{d+1}\,P = 0$.

2°)d) Soit un polynôme de degré d, défini par $P = p_0\,P_0 + p_1\,P_1 + \ \dots\ + p_d\,P_d$ ($p_d \neq 0$).
Il appartient à $\mathrm{Ker}(\Delta)$ si et seulement si $\Delta P = p_1\,P_0 + p_2\,P_1 + \ \dots\ + p_d\,P_{d-1} = 0$, et donc si et seulement si $p_1 = p_2 = \ \dots\ = p_d = 0$, donc si et seulement si $P = p_0\,P_0 = p_0$, et donc si et seulement si P est un polynôme constant.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$ et Δ n'est pas injectif.

En revanche, Δ est surjectif car tout polynôme $P = p_0\,P_0 + p_1\,P_1 + \ \dots\ + p_d\,P_d$ ($p_d \neq 0$) peut s'écrire sous la forme $P = \Delta Q$ comme suit :

$$P = p_0\,\Delta(P_1) + p_1\,\Delta(P_2) + \ \dots\ + p_d\,\Delta(P_{d+1}) = \Delta(p_0\,P_1 + p_1\,P_2 + \ \dots\ + p_d\,P_{d+1}).$$

3°)a) Comme $\Delta P_{n+1} = P_n$, on a la relation $\Delta^k\,P_n = P_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.
Et comme $\Delta^n\,P_n = P_0 = 1$ et que $\Delta 1 = 0$, il est clair que $\Delta^k\,P_n = 0$ pour $k > n$.
Comme 0 est racine des polynômes P_n pour $n \geq 1$, on a donc $\Delta^k\,P_n(0) = P_{n-k}(0) = 0$ si $0 \leq k < n$, puis $\Delta^n\,P_n(0) = 1$, et enfin $\Delta^k\,P_n(0) = 0$ si $k > n$, d'où $\Delta^k\,P_n(0) = \delta_{k,n}$.

3°)b) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré égal à d, on peut écrire :

$$P = p_0\,P_0 + p_1\,P_1 + \ \dots\ + p_d\,P_d \qquad (p_d \neq 0)$$

En appliquant l'endomorphisme Δ^k pour $0 \leq n \leq d$ aux deux membres et en faisant $x = 0$, on obtient (puisque $\Delta^k\,P_n(0) = \delta_{k,n}$) l'égalité $\Delta^k\,P(0) = p_k$ et on en tire la formule voulue :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{d} \Delta^k\,P(0)\,P_n(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^k\,P(0)\,P_n(X).$$

4°)a) Comme $\Delta P_0 = 0$ et $\Delta P_{n+1} = P_n$, la matrice de Δ_d dans $(P_0, P_1, \ \dots, P_d)$ est :

$$M(\Delta_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\Delta X^n = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$, la matrice de Δ_d dans $\left(1,\ X,\ \ldots,\ X^d\right)$ est :

$$M(\Delta_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \binom{d}{0} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \binom{d}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{d}{d-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4°)b) Dans les deux cas, la matrice est triangulaire et les valeurs propres, qui se lisent sur la diagonale, se réduisent à 0. Le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{R}_0[X]$ (voir 2°). Il est clair que Δ_d n'est pas diagonalisable, sinon sa matrice serait semblable à la matrice nulle, et donc serait nulle, ce qui équivaut à $\Delta_d = 0$: contradiction.
Enfin, Δ_d est nilpotent puisqu'on a $\Delta_d^{d+1} P = 0$ pour tout polynôme de degré $\leq d$.

■ Partie II : Approximation de dérivées $n^{\text{èmes}}$ par différences finies

5°) On a $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$, ce qui implique :

$$\Delta^2 P(X) = \Delta P(X+1) - \Delta P(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X).$$

Ceci conduit à formuler l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\Delta^n P(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

Nous la vérifions maintenant au rang $n+1$:

$$\Delta^{n+1} P(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta P(X+j).$$

En coupant la somme $\Delta P(X+j+1) = P(X+j+1) - P(X+j)$, on obtient :

$$\Delta^{n+1} P(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j+1) - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

On pose $i = j+1$ dans la première somme, $i = j$ dans la seconde, on a :

$$\Delta^{n+1} P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} (-1)^{n-i+1} P(X+i) - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} P(X+i).$$

On en déduit maintenant :

$$\Delta^{n+1} P(X) = P(X+n+1) + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right) (-1)^{n+1-i} P(X+i) + (-1)^{n+1} P(X).$$

Et d'après la formule du triangle de Pascal, on arrive en réintégrant les termes extrêmes :

$$\Delta^{n+1} P(X) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} P(X+i).$$

6°)a) Exprimons X^n dans la base $(P_0, \ \dots, P_n)$: $X^n = p_n P_n + \ \dots\ + p_0 P_0$.
L'examen des coefficients dominants donne ici $p_n = n!$ et on en déduit en prenant l'image par Δ^n : $\Delta^n X^n = p_n P_0 = p_n = n!$
En appliquant la formule de la question 5° au polynôme X^n, il vient alors :

$$\Delta^n X^n = n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^n.$$

En faisant $x = 0$, on obtient alors :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!\,.$$

6°)b) Pour $0 \le k < n$, on a $\Delta^n X^k = 0$ et la formule de la question 5° donne ici :

$$\Delta^n X^k = 0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^k.$$

En faisant $x = 0$, on obtient alors :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0\,.$$

7°)a) La formule de Taylor-Young donne, puisque f est de classe C^m avec $m \ge n$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

En changeant h en jh, on a donc :

$$f(a+j\,h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n).$$

7°)b) En reportant dans $A_n(h)$, on obtient donc :

$$h^n A_n(h) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+j\,h) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n).$$

En permutant les sommes, on a :

$$h^n A_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k \right) \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

D'après la question précédente, les coefficients de h^k sont nuls pour $0 \le k < n$, tandis que le coefficient de h^n est égal à $n!\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = f^{(n)}(a)$ et il en résulte que :

$$A_n(h) = f^{(n)}(a) + o(1).$$

On en déduit que $\lim_{h \to 0} A_n(h) = f^{(n)}(a)$.

■ Partie III : Calcul de la somme des puissances des *n* premiers entiers

8°)a) Si $R = \Delta Q$, on a par sommation d'une série télescopique :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{p} R(k) \;=\; \sum_{k=0}^{p} (Q(k+1) - Q(k)) \;=\; Q(p+1) - Q(0).$$

8°)b) En utilisant les formules des questions 3° et 5° ou directement, on obtient :

$$X = P_1(X)\;\;;\;\; X^2 = 2\,P_2(X) + P_1(X)\;\;;\;\; X^3 = 6\,P_3(X) + 6\,P_2(X) + P_1(X).$$

Comme $\Delta P_{n+1} = P_n$, on en déduit que :

$$X = \Delta \mathrm{P}_2(X)\;\;;\;\; X^2 = \Delta(2\,P_3(X) + P_2(X))\;\;;\;\; X^3 = \Delta(6\,P_4(X) + 6\,P_3(X) + P_2(X)).$$

8°)c) En appliquant ce résultat et celui de 8°)a), on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}$, compte tenu de la nullité en 0 des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 (ou P_n pour $n \geq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{p} k \;=\; P_2(p+1) = \frac{p(p+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^2 \;=\; 2\,P_3(p+1) + P_2(p+1) \;=\; \frac{p(p+1)(2\,p+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^3 \;=\; 6\,P_4(p+1) + 6\,P_3(p+1) + P_2(p+1) \;=\; \frac{p^2(p+1)^2}{4}.$$

9°)a) Il est clair que $(\Delta P)'(X) = (P(X+1) - P(X))' = P'(X+1) - P'(X) = \Delta \mathrm{P}'(X)$.

9°)b) Supposons que $\Delta B_{n+1}(X) = X^n$. On observe qu'on a :

- en faisant $x = 0$, on a $\Delta B_{n+1}(X) = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ pour $n \geq 1$.
- en dérivant, on a compte tenu de $(\Delta P)' = \Delta(P')$ et de $\Delta B_n(X) = X^{n-1}$:

$$(\Delta B_{n+1})' = n\,X^{n-1} \qquad \text{ou} \qquad \Delta(B_{n+1}{}') = n\,\Delta \mathrm{B}_n.$$

  Ce qui équivaut à dire que $B_{n+1}{}' - n\,B_n$ appartient à $\mathrm{Ker}(\Delta)$.
- la relation $\Delta B_1 = 1$ implique $B_1(X) = X + c_1$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$.

9°)c) Supposons ces trois conditions vérifiées, et montrons par récurrence que $\Delta B_{n+1} = X^n$.
On a $\Delta B_1 = 1$ puisque $B_1(X) = X - b_1$.
On suppose maintenant que $\Delta B_n = X^{n-1}$ et on montre que $\Delta B_{n+1} = X^n$.
La condition $B_{n+1}{}' - n\,B_n \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ implique $\Delta(B_{n+1}{}') = n\,\Delta(B_n)$, et comme $(\Delta P)' = \Delta(P')$, ceci s'écrit aussi $(\Delta \mathrm{B}_{n+1})' = n\,\Delta \mathrm{B}_n$. L'hypothèse de récurrence donne alors $\Delta B_n = X^{n-1}$, donc $(\Delta \mathrm{B}_{n+1})' = n\,X^{n-1}$, et on obtient enfin par intégration $\Delta B_{n+1} = X^n + c_n$ avec $c_n \in \mathbb{R}$. La condition $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$, ou $\Delta B_{n+1}(0) = 0$, implique alors $c_n = 0$, donc $\Delta B_{n+1} = X^n$.

10°)a) D'après la condition 1, $\forall\, n \geq 1,\ B_{n+1}{}' = n\, B_n$, la condition 2 équivaut à :

$$\forall\, n \geq 1,\ \ B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = n \int_0^1 B_n(t)\, \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_0^1 B_n(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

10°)b) On a donc $B_1(X) = X + c_1$, où $c_1 \in \mathbb{R}$.
La condition 2 équivaut alors à $\int_0^1 (t + c_1)\, \mathrm{d}t = 0$, soit $c_1 = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que : $\boxed{B_1(X) = X - \frac{1}{2}}$.

Comme $B_2{}'(X) = B_1(X) = X + c_1$, on a $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + c_2$, où $c_2 \in \mathbb{R}$.

La condition 2 équivaut alors à $\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + c_2\right) \mathrm{d}t = 0$, soit $c_2 = \frac{1}{6}$.

On en déduit que : $\boxed{B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{6}}$.

Comme $B_3{}'(X) = 2\, B_2(X)$, on a $B_3(X) = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} + c_3$, où $c_3 \in \mathbb{R}$.

La condition 2 équivaut alors à $\int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6} + c_3\right) \mathrm{d}t = 0$, soit $c_3 = 0$.

On en déduit que : $\boxed{B_3(X) = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6}}$.

Comme $B_4{}'(X) = 3\, B_3(X)$, on a $B_4(X) = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} + c_4$, où $c_4 \in \mathbb{R}$.

La condition 2 équivaut alors à $\int_0^1 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4} + c_4\right) \mathrm{d}t = 0$, soit $c_4 = -\frac{1}{30}$.

On en déduit que : $\boxed{B_4(X) = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} - \frac{1}{30}}$.

Comme $\Delta B_{n+1} = X^n$, la formule 9°)a) implique alors :

$$\sum_{k=0}^{p} k \;=\; B_2(p+1) - B_2(0) = \frac{p(p+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^2 \;=\; B_3(p+1) - B_3(0) = \frac{p(p+1)(2\,p+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^3 \;=\; B_4(p+1) - B_4(0) = \frac{p^2(p+1)^2}{4}.$$

10°)c) L'existence et l'unicité de la suite (B_n) se généralisent comme suit.
Supposons obtenu B_n (nécessairement de degré n puisqu'on a $\Delta B_n = X^{n-1}$) :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\, X^k.$$

Comme $B_{n+1}{}' = n\, B_n$, on en déduit que :

$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\, p_{n,k}}{k+1}\, X^{k+1} + c_{n+1}.$$

La condition 2 équivaut alors à $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \frac{n\, p_{n,k}}{k+1}\, t^{k+1} + c_{n+1}\right) \mathrm{d}t = 0$, soit :

$$c_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{n\, p_{n,k}}{(k+2)\,(k+1)}.$$

Le polynôme B_{n+1} vérifiant les conditions requises est ainsi déterminé par récurrence de manière unique, et on observera que ses coefficients sont rationnels.

10°)d) On peut ranger les coefficients des polynômes B_k $(1 \leq k \leq n)$ dans un tableau $\left(p_{i\,j}\right)$ de taille (n, n) dont les éléments auront été initialisés à 0.
Dans la première ligne, on prend $p_{10} = -1/2$ et $p_{11} = 1$ puisque $B_1(X) = X - 1/2$.
Puis les formules obtenues à la question précédente permettent de remplir successivement les lignes 2 à n du tableau avec les coefficients de B_2, ..., B_n.
Bien entendu, une programmation de ces opérations en rationnels (et non en flottants) permettra d'obtenir les coefficients de ces polynômes sous forme rationnelle.