CCP PC 2010 Math 1

Il n'est pas inutile de remarquer que IB est un exemple de la partie 2 et que la partie 3 généralise la partie 2.
On trouvera ainsi des réponses dans la suite du problème . II.3 contient la réponse à I.B.5 par exemple.

Partie 1

A 1) On calcule le polynôme caractéristique en développant par rapport à la dernière ligne.

$$\boxed{Sp(A) = \{0, 1, 4\}}$$

A est de taille 3×3 et admet 3 valeurs propres distinctes . A est diagonalisable et les sous espaces propres sont des droites.
A.2)

- calcul de $E_0 = \text{Ker}(A)$: $\left\{\begin{array}{r} 8x+4y-7z=0 \\ -8x-4y+8z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 8x+4y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$, $E_0 = \text{Vect}(I)$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- calcul de $E_1 = \text{Ker}(A)$: $\left\{\begin{array}{r} 7x+4y-7z=0 \\ -8x-5y+8z=0 \\ 0z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 7(x-z)+4y=0 \\ -8(x-z)-5y=0 \end{array}\right.$,donc comme $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$: $E_1 = \text{Vect}\,(J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- calcul de $E_4 = \text{Ker}(A)$: $\left\{\begin{array}{r} 4x+4y-7z=0 \\ -8x-8y+8z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x+4y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$, $E_4 = \text{Vect}(K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- D est la matrice diagonale des valeurs propres $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

A.3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On a $A = Mat_{i,jk}(I,J,K).Mat_{I,J,K}\,(f)\,.Mat_{I,J,K}\,(i,jk)$.
Donc pour $m \geq 1$: $A^m = Mat_{i,j,k}(f^m) = Mat_{i,jk}(I,J,K).Mat_{I,J,K}\,(f^m)\,.Mat_{I,J,K}\,(i,jk) = PD^mP^{-1}$
A.4) On pose $Pv = V$: $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=X \\ -2x \quad\quad -z=Y \\ y=Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+z=X-Z \\ -2x-z=Y \\ y=Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=-X-Y+Z \\ y=Z \\ z=2X+Y-2Z \end{array}\right.$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où pour $m \geq 1$: $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4^m & 4^m & 1-2.4^m \\ -2.4^m & -4^m & 2.4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On remarque que pour $m = 0$ la formule est fausse . Ce qui montre l'importance de traiter à part le cas $m = 0$(cf la suite)
On peut aussi remarquer que A^m se décompose $A^m = 1^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4^m \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il existe donc λ, μ, p et q tels que $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$
Même si le sujet ne le dit pas explicitement I.A est bien un exemple de la partie II.
A.5) On pose $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ le système $XD = DX$ donne $\begin{pmatrix} 0=0, & b=0, & 4c=0 \\ 0=d, & e=e, & 4f=f \\ 0=4g, & h=4h, & 4i=4i \end{pmatrix}$ donc $b=c=d=f=g=h=0$. donc $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ et on vérifie que $XD = DX$
A6) $HD = DH = H^3$
A7) d'après A.6) si $H^2 = D$ alors $HD = DH$ et donc d'après A.5) H est du type $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. $H^2 = D$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{l} a^2=0 \\ e^2=1 \\ i^2=4 \end{array}\right.$$

On a donc 4 solutions $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $H_2 = -H_1$, $H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $H_4 = -H_3$
Si $X^2 = A$ on pose $X = PHP^{-1}$ on a alors $X^2 = A \Leftrightarrow PH^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow H^2 = D$
La matrice A a donc 4 racines carrées :

$$\boxed{A_1 = PH_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = -A_1, A_3 = PH_3P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = -A_3}$$

B.1) On a $J^2 = 3J$ et par récurrence : $\forall m \geq 1$, $J^m = 3^{m-1}J$:

- vrai si $m = 1$
- Si $J^m = 3^{m-1}J$ alors $J^{m+1} = 3^{m-1}J^2 = J^m = 3^{m-1}.3.J = 3^mJ$

B.2) On a $A = I_3 + J$. Comme I_3 et J commutent on a pour $m \geq 1$:

$$A^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k$$

Or pour $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$

$$\begin{aligned} A^m &= I_3 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1}J = I_3 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^kJ \\ &= I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k - 1\right) J = I_3 + \frac{1}{3}\left((3+1)^m - 1\right) J \end{aligned}$$

On a donc $A^m = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1) J$. Soit $\boxed{f^m = id + \frac{1}{3}(4^m - 1) j}$.

- si $m = 0$: $Id = Id + \frac{1}{3}(1-1) j$ est encore vrai.

B.3) On calcule le polynôme caractéristique en commençant par ajouter les 3 colonnes

$$\boxed{Sp(A) = \{1 \text{ (double)}, 4 \text{ (simple)}\}}$$

donc $\lambda = 1, \mu = 4$
B.4)

- Analyse **:** Si p et q existent on a pour $m = 0$ et $m = 1$: $\begin{cases} p + q = id \\ p + 4q = f \end{cases}$ et donc $q = \dfrac{f - id}{3}$, $p = \dfrac{4id - f}{3}$

Vérification avec B.2): $q = \dfrac{f - id}{3} = \dfrac{j}{3}$, $p = \dfrac{4id - f}{3} = \dfrac{3id - j}{3}$ et donc

$$p + 4^m q = id + \frac{1}{3}(4^m - 1) j = f^m$$

$$\boxed{p = \frac{4id - f}{3} = \frac{3id - j}{3}, \ q = \frac{f - id}{3} = \frac{j}{3}}$$

id et j forment un système libre et $mat_{id,j}p, q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ de déterminant non nul.

$$\boxed{(p, q) \text{ est libre}}$$

B.5) Comme id et j commutent et $j^2 = \dfrac{j}{3}$:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{9id - 6j + j^2}{9} = \frac{9id - 3j}{9} = p \ , \ q^2 = \frac{j^2}{9} = \frac{3j}{9} = q \ , \\ p \circ q &= q \circ p = \frac{3j - j^2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Soit alors $h = ap + bq$ vérifiant $h^2 = f$. On a avec les calculs précédents : $a^2p + b^2q = p + 4q$.
Or (p, q) est libre donc $a^2 = 1$ et $b^2 = 4$. On a 4 solutions :

$$\boxed{h_1 = p + 2q\ ,\ h_2 = -h_1\ ,\ h_3 = p - 2q\ ,\ h_4 = -h_3}$$

B.6) On calcule les sous espaces propres :

- $E_1 \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right.$ c'est un plan dont une base est $I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $E_4 \left\{ \begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array} \right.$ On retranche la première ligne aux 2 autres : $x = y = z$. Une base est $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  La somme des dimensions des sous espaces propres vaut 3 . donc f est diagonalisable.

- Par choix des vecteurs de base $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et donc $Mat_{I,J,K}(p) = Mat_{I,J,k}\left(\dfrac{4id - f}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et

  $Mat_{I,J,K}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B.7) Toute matrice non diagonale d'une symétrie plane convient. La plus simple est la symétrie qui échange i et j : $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie $K^2 = I_2$

Il suffit de prendre par blocs $Y = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B.8) Si on prend $Y = Mat_{I,J,K}(h)$ on a $h^2 = f$, mais Y n'est pas diagonale donc $Y \notin \text{Vect}(Mat_{I,J,K}(p), Mat_{I,J,K}(q))$ donc $h \notin \text{Vect}(p, q)$

B.9)

méthode 1 par le polynôme annulateur.: f est diagonalisable de valeurs propres 1 et 4 donc $(X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur. soit $(f - Id) \circ (f - 4Id) = 0$
Si $h^2 = f$ on a $\left(h^2 - Id\right) \circ \left(h^2 - 4Id\right) = 0$ qui se factorise $(h - Id) \circ (h + Id) \circ (h - 2Id) \circ (h + 2Id) = 0$ .Ce qui montre que $(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de h . h est donc diagonalisable.
méthode 2 en cherchant une base de vecteurs propres de h: En restant dans la base (I, J, K) on pose $H = Mat_{I,J,K}(h)$.
Alors H vérifie $H^2 = D$. Donc $HD = DH = H^3$. On pose $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $HD = DH$ donne $c = f = g = h = 0$.

H est donc du type par blocs $H = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. La condition $H^2 = D$ donne $K^2 = I_2$ et $i^2 = 4$.
K est donc la matrice d'une symétrie .

- Si $K = \pm I_2$, H est diagonale et donc h est diagonalisable
- Sinon K est dans $\text{Vect}(I, J)$ la matrice d'une symétrie par rapport à une droite . Il existe deux vecteurs libres du plan tels que $k(u) = u$ et $k(v) = -v$.

  Dans la base (u, v, K) la matrice de h est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$ donc h est diagonalisable.

$$\boxed{\text{toute racine carrée de } f \text{ est diagonalisable}}$$

Partie 2

1.

$$\begin{aligned}
(f - \lambda Id) \circ (f - \mu Id) &= f^2 - (\lambda + \mu) f + \lambda\mu Id \\
&= (\lambda^2 p + \mu^2 q) - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) \\
&= \left(\lambda^2 - (\lambda + \mu)\lambda + \lambda\mu\right) p + \left(\mu^2 - (\lambda + \mu)\mu + \lambda\mu\right) q = 0
\end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$, $(X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples .

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est diagonalisable}}$$

2. Si k est valeur propre de f , k est racine du polynôme annulateur précédent et donc $k \in \{\lambda, \mu\}$. Soit $Sp(f) \subset \{\lambda, \mu\}$.
   Pour montrer que μ (et λ par symétrie) est valeur propre on procède par l'absurde : Si μ n'est pas valeur propre, $f - \mu Id$ est inversible donc d'après B.1) $f = \lambda Id$. On a donc par hypothèse : $\left\{\begin{array}{c} Id = p+q \\ \lambda Id = \lambda p + \mu q \end{array}\right.$ . . Par Pivot de Gauss $(L_2 - \lambda L_1)$ on a $(\lambda-\mu)\, q = 0$. Absurde car $\lambda \neq \mu$ et $q \neq 0$ (hypothèses)

$$\boxed{Sp(f) = \{\lambda, \mu\}}$$

3. On a $f - \lambda Id = (\lambda p + \mu q) - \lambda (p+q) = (\mu - \lambda)\, q$ et $f - \mu Id = (\lambda - \mu)\, p$. La relation de $II.1)$ donne $-(\lambda-\mu)^2 (q \circ p) = 0$. Donc (comme $\lambda \neq \mu$) :$q \circ p = 0$
   Comme les 2 facteurs de II.1) commutent on a de même $p \circ q = 0$
   On a alors en composant par p la relation $Id = p + q$: $p = p^2 + p \circ q = p^2$ et de même $q = q^2$.

$$\boxed{p \circ q = q \circ p = 0, p^2 = p, q^2 = q}$$

   remarque : et comme $p + q = Id$, p et q sont deux projecteurs associés.
   remarque : on peut aussi résoudre $\left\{\begin{array}{c} Id = p+q \\ f = \lambda p + \mu q \end{array}\right.$, *donc* $\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{\mu Id - f}{\mu - \lambda} \\ q = \dfrac{\lambda Id - f}{\lambda - \mu} \end{array}\right.$, *calculer* $p^2 \cdots$ *et simplifier avec les expressions de* f^2, f *et* Id

4. Comme $\lambda\mu \neq 0$, 0 n'est pas valeur propre de f et donc f est inversible.
   Si $f^{-1} = \alpha p + \beta q$ les relations précédentes donnent $f \circ f^{-1} = \lambda\alpha p + \mu\beta q$ et $f \circ f^{-1} = Id = p + q$. Une possibilité est $\alpha = \lambda^{-1}$, $\beta = \mu^{-1}$.
   On ne sait pas encore si c'est la seule solution (attendre II.6 pour savoir que la famille est libre)

$$\boxed{f \text{ est inversible et } f^{-1} = \frac{p}{\lambda} + \frac{q}{\mu}}$$

5. On vérifie par récurrence : H_k : $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$ et $f^{-k} = \lambda^{-k} p + \mu^{-k} q$:
   - La relation est vrai si $k = 0$ et 1
   - Si $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$ alors $f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\lambda^k p + \mu^k q\right) \circ (\lambda p + \mu q) = \lambda^{k+1} p + \mu^{k+1} q$ (toujours avec les simplifications de II.3) .
   - Si $f^{-k} = \lambda^{-k} p + \mu^{-k} q$ alors $f^{-k-1} = f^{-k} \circ f^{-1} = \left(\lambda^{-k} p + \mu^{-k} q\right) \circ \left(\lambda^{-1} p + \mu^{-1} q\right) = \lambda^{-k-1} p + \mu^{-k-1} q$.
   Donc $\forall k \in \mathbb{N}$: $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$ et $f^{-k} = \lambda^{-k} p + \mu^{-k} q$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} : f^k = \lambda^k p + \mu^k q}$$

6. (p, q) est libre : On suppose $ap + bq = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on compose par p : comme $p \circ q = 0$ et $p^2 = p$ on a $ap = 0$ donc $a = 0$ car $p \neq 0$ .De même $b = 0$ et donc :

$$\boxed{\dim(F) = 2}$$

7. Si $g \in F$ on a la décomposition $g = \alpha p + \beta q$. Donc $g^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$. Et donc comme la famille (p, q) est libre $g^2 = f \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda, \beta^2 = \mu$. comme on suppose $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ on peut prendre leurs racines carrées dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ a 4 racines carrées dans } F : \pm\sqrt{\lambda} p \pm \sqrt{\mu} q}$$

8. On a une solution à la question I.B.7 si $k = 2$. Pour avoir K en dimension $k > 2$, il suffit de reprendre cette solution et de la compléter par un bloc identité.

$$K = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (0) \\ (0) & I_{k-2} \end{pmatrix}$$

9. On se place dans toute cette question dans une base adaptée au projecteur p.c'est à dire une base dans la quelle $Mat(p) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en notant $k = rg(p)$. Comme $Id = p + q$ on a $Mat(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$. Si $k \geq 2$ la matrice $M' = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $M'^2 = Mat(p)$ et $M'Mat(q) = Mat(q)M' = 0$. Donc si p' vérifie dans cette base $Mat(p') = M'$ alors p' est solution.

   Mais comme $f = \lambda p + \mu q$ on a dans cette base $Mat(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_k & 0 \\ 0 & \lambda I_{n-k} \end{pmatrix}$ diagonale. k est donc la multiplicité de la valeur propre λ . L'hypothèse du sujet sur la multiplicité de λ , assure donc $k \geq 2$.

   De plus M' n'est pas diagonale alors que la matrices de $\alpha p + \beta q$ est $\begin{pmatrix} \alpha I_k & 0 \\ 0 & \beta I_{n-k} \end{pmatrix}$ toujours diagonale . donc $p' \notin F$

10. Si $\dim(E) \geq 3$, la somme des multiplicités des valeurs propres est 3 (diagonalisable) . donc λ ou μ est valeur propre multiple. Par symétrie on peut supposer que λ est multiple , donc utiliser le p' précédent.. On prend $g = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$. comme $p' \circ q = q \circ p' = 0$, $q^2 = q, p'^2 = p$ on a $g^2 = \lambda p + \mu q = f$.

    Par l'absurde on suppose $g \in F$ soit$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q = ap + bq$. En regardant les matrices précédentes on a $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}K & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_k & 0 \\ 0 & bI_{n-k} \end{pmatrix}$. On a donc $aI_k = \sqrt{\lambda}K$. Donc $a = 0$ (coefficient ligne 1 colonne 1) donc $\lambda = 0$ (ligne 1 colonne 2) . C'est absurde car depuis II.4 $\lambda \neq 0$ . .

$$\boxed{f \text{ admet des racines carrées qui ne sont pas dans } F}$$

Partie 3

1. Par combinaison linéaire : Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$$

   On peut commuter les deux $\sum$ car le domaine de i est indépendant de k .

2. Si $Q = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ on a :

$$\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i Id) = Q(f) = \sum_{i=1}^{m} Q(\lambda_i) p_i$$

   mais chaque λ_i est racine de Q donc

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i Id) = 0}$$

   Par hypothèse les λ_i sont deux à deux distincts . P est donc un polynôme annulateur scindé à racines simples /

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

3. On vient d'introduire les polynômes de Lagrange . On a donc $\forall\,(l,j) \in [[1,m]]^2$, $P_l(\lambda_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = l \\ 0 \text{ si } j \neq l \end{cases}$.

   On prend $P = L_l$ dans la formule de la question 1 :

$$L_l(f) = \sum_{i=1}^{m} L_l(\lambda_i)\, p_i = p_l + \sum 0 = p_l$$

   On a donc

$$(f - \lambda_l Id) \circ p_l = (f - \lambda_l Id) \circ P_l(f) = (f - \lambda_l Id) \circ \prod_{i \neq l} \frac{f - \lambda_i Id}{\lambda_l - \lambda_i} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i Id)}{\prod_{i \neq l} (\lambda_i - \lambda_l)} = 0$$

   d'après le calcul de $Q(f)$ à la question 2.

   On a $(f - \lambda_l Id) \circ p_l = 0$ donc $\mathrm{Im}(p_l) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_l Id)$

Pour tout λ_l le sujet suppose $p_l \neq 0$ et donc $\mathrm{Im}(p_l) \neq \{0\}$. D'après l'inclusion précédente le noyau de $f - \lambda_l Id$ n'est pas réduit à 0 et λ_l est donc bien valeur propre de f.

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset Sp(f)$$

D'autre part les valeurs propres sont incluses dans les racines de $Q = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ qui est un polynôme annulateur.

$$Sp(f) \subset \{\lambda_i\}$$

$$\boxed{Sp(f) = \{\lambda_i\}}$$

4. J'étudie $p_l \circ p_j$ pour pouvoir garder le "i" variable dans les $\sum$.

 - Pour $l \neq j$ on utilise $p_l = L_l(f)$ (Q III.3) donc $p_l \circ p_j(v) = \prod_{i \neq l} \frac{f - \lambda_i Id}{\lambda_l - \lambda_i}(p_j(v))$. comme $l \neq j$ l'un des facteurs correspond à $i = j$ et donc
$$p_l \circ p_j(v) = \prod_{i \neq l, i \neq qj} \frac{f - \lambda_i Id}{\lambda_l - \lambda_i} \left(\frac{f - \lambda_j}{\lambda_l - \lambda_j}(p_j(v)) \right)$$
or $\mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_j Id)$ (III.3) et donc $p_j(v) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_j Id)$ et donc $p_l \circ p_j(v) = \prod_{i \neq l, i \neq qj} \frac{f - \lambda_i Id}{\lambda_l - \lambda_i} \left(\frac{f - \lambda_j}{\lambda_l - \lambda_j}(0) \right) = 0$
.
Comme on a pour tout vecteur v , $p_l \circ p_j = 0$ on a bien $p_l \circ p_j = 0$ pour $l \neq j$
 - Pour $l = j$, on prend l'hypothèse de cette partie pour $k = 0$: $\sum_{i=1}^m p_i = Id$. On compose par p_j . Tous les termes sont nuls pour $i \neq j$ d'après la relation précédente et il reste $p_j^2 = p_j$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [[1, m]]^2 \ , \ p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i}$$

5. f est diagonalisable et les valeurs propres sont les λ_i donc E est la somme directe des sous espaces propres.
$E = \oplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}(f) = \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$
On veut montrer que les p_i sont les projecteurs associés à cette décomposition :

 - p_i est un projecteur (linéaire par hypothèse et $p_i^2 = p_i$)
 - En utilisant $k = 0$ dans la formule $f^k = \sum_{i=0}^m \lambda_i^k p_i$, on a $Id = \sum_{i=0}^m p_i$.

 Tout vecteur x de E se décompose $x = \sum_{i=1}^m p_i(x)$ avec $p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$. D'après la question 3 $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$. La décomposition $x = \sum_{i=1}^m p_i(x)$ est donc l'unique décomposition de x dans la somme directe $\oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$. p_i est donc la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$ parallèlement à la somme des autres noyaux.

6. La dimension est déjà $\leq m$. Vérifions que la famille $(p_i)_{i=1}^m$ est libre en composant, pour tout k, par p_k une combinaison linéaire et en utilisant la relation de la question 4:

$$\sum_{i=1}^m a_i p_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \left(p_k \circ p_i\right) = 0 \Rightarrow a_k p_k + \sum 0 = 0$$

mais par hypothèse du sujet $p_k \neq 0$ et donc $a_k = 0$

Tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre.

$$\boxed{\dim(F) = m}$$

On peut maintenant se placer, si on veut, dans une base de vecteurs propres adaptée à la somme $\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_i Id)$. Dans cette base on a par blocs $Mat(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{r_m} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_m I_{r_m}\end{pmatrix}$ en notant $r_i=\dim\left(\operatorname{Ker}(f-\lambda_i Id)\right)$. les p_i sont les projecteurs associés donc $Mat(p_1)=\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & 0\end{pmatrix},\cdots$.

7. Soit $g=\sum_{i=1}^{m} a_i p_i$ un élément de F qui soit une racine carrée de f . On aura $g^2=\sum_{i;j}\alpha_i a_j\,(p_i\circ p_j)$ Comme $p_i\circ p_j=0$ si $i\neq j$ et $p_i^2=p_i$, il reste $g^2=\sum_{i=1}^{m} a_i^2 p_i$.

   On veut $g^2=f$ donc $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 p_i.=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p_i$. Comme la famille est libre $a_i^2=\lambda_i.Les\lambda_i$ sont des réels positifs , on peut prendre leur $\sqrt{\ }$ dans $\mathbb{R}$.

   $$\boxed{\text{les racines carrées de } f \text{ dans } F \text{ sont les } g=\sum_{i=0}^{m}\pm\sqrt{\lambda_i}p_i}$$

   On a 2^m solutions si $0\notin\{\lambda_i\}$ et 2^{m-1} solutions sinon.

8. 1) Si $m=n$, le nombre de valeurs propres est égale à la dimension. Toutes les valeurs propres sont simples et donc les sous espaces propres sont des droites.

   2) Si h est une racines carrée de f , h et f commutent , les sous espaces propres de f sont stables par h . Si v est un vecteur propre de f il dirige une droite propre. Son image par h est encore dans cette droite . v est un vecteur non nul colinéaire à son image par h. v est un vecteur propre de h .

   3) Soit plus généralement $(b_i)_{i=1}^n$ une base de vecteurs propres de f associée au (λ_i). On a aussi une base de vecteurs propres de h .

   Dans cette base $f(b_i)=\lambda_i b_i$ et d'après la question précédente il existe μ_i tel que $h(b_i)=\mu_i b_i$. donc $\mu_i^2=\lambda_i$

   - Si $\exists i,\lambda_i<0$, l'équation $\mu_i^2=\lambda_i$ est impossible : pas de racines carrées
   - Si $\forall i$, $\lambda_i>0$, chaque λ_i admet 2 racines carrées , on a donc 2^n solutions au problème (toutes distinctes car l'image d'une base caractérise l'application).. On d'après la question 7 on a $2^m=2^n$ solutions dans F . Toutes les solutions sont donc dans F.
   - Si $\forall i,\lambda_i\geq 0$ avec un $\lambda_j=0$, c'est la même chose avec 2^{n-1} solutions.

9. Si $m<n$, l'un (au moins) des sous espaces propres E_{λ_i} est de dimension $p>1$ .On suppose $k=1$. On a par blocs $Mat(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_k & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 I_r & 0\\ 0 & 0 & \ddots\end{pmatrix}$.

   - Si $\lambda_1\neq 0$, il suffit d'utiliser la matrice K du II et de prendre $Mat(h)=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}K & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2}I_r & 0\\ 0 & 0 & \ddots\end{pmatrix}$. On a $h^2=f$ et $h\notin F$.
   - Si $\lambda_1=0$ on prend $Mat(h)=\begin{pmatrix}N & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2}I_r & 0\\ 0 & 0 & \ddots\end{pmatrix}$ avec $N=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$. On a $h^2=f$ et $h\notin F$

Partie 4.A

1. Comme $f^{p-1}\neq 0$, on peut choisir x tel que $f^{p-1}(x)\neq 0$. Comme f est linéaire , x est non nul.
Comme $f^p=0$ pour tout $q\geq p$ on a $f^q=0$.
La famille $\left(x,f(x),\cdots f^{(p-1)}(x)\right)$ est alors libre :
Si $\sum_{k=0}^{p-1}a_kf^k(x)=0$, on prend l'image par f^{p-1} , il reste $a_0f^{p-1}(x)=0$ et donc comme $f^{p-1}(x)\neq 0$ on a $a_0=0$.
Puis par récurrence forte si pour un $i\leq p-2$ on a $a_0=a_1=a_i=0$ il reste $\sum_{k=i+1}^{p-1}a_kf^k(x)=0$ et on compose par f^{p-2-i} il reste $a_{i+1}f^{p-1}(x)=0$ donc $a_{i+1}=0$.
La famille $\left(f^i(x)\right)$ est donc une famille libre de cardinal p dans un espace de dimension n donc $p\leq n$.
Comme $f^p=0$ et $n\geq p$ on a bien :
$$\boxed{f^n=0}$$

2. Soit g telle que $g^2=f$ on a donc $g^{2p-2}\neq 0$ et $g^{2p}=0$. On a deux cas selon g^{2p-1} :
   - si $g^{2p-1}=0$ on applique le résultat précédent à g : $\left\{g^{2p-2}\neq 0,g^{2p-1}=0\right\}\Rightarrow 2p-1\leq n$
   - si $g^{2p-1}\neq 0$ on applique le résultat précédent à g $\left\{g^{2p-1}\neq 0,g^{2p}=0\right\}\Rightarrow 2p\leq n$
   - Dans les deux cas $2p-1\leq n$

3. La fonction $\sqrt{1+x}$ est C^∞ sur $]-1,1[$ donc admet bien un développement limité à tout ordre :
$$\sqrt{1+x}=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^k)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k+O(x^n)$$
en posant $O(x^n)=a_nx^n+o(x^n)=x^n(a_n+o(1))$ D'après le développement limité de $(1+x)^\alpha$ en $x=0$ on a $a_0=1$ $a_1=\dfrac{1}{2}$ et pour $k\geq 2$,
$$\begin{aligned}a_k &= \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-k+1)}{k!}=\frac{(-1)(-3)\cdots(-2k+3)}{2^kk!}=\frac{(-1)^k\,(1.3.\cdots(2k-3))}{2^kk!}\\ &= \frac{(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}}{2^kk!}=(-1)^{k-1}\,\frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}k!(k-2)!}\end{aligned}$$
$$\boxed{a_0=1\ ,\ a_1=\frac{1}{2}\ ,\ \forall k\geq 2\ ,\ a_k=(-1)^{k-1}\,\frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}k!(k-2)!}}$$

4. On a $\sqrt{1+x}=P_n(x)+O(x^n)$. Donc $(1+x)=P_n(x)^2+2P_n(x)O(x^n)+O\left(x^{2n}\right)$ et donc
$$P_n^2(x)-x-1=x^n\left(2P_n(x)O(1)+O\left(x^n\right)\right)$$
Par définition d'un O , $O(1)$ est borné , P_n est un polynôme donc est continu (donc borné) au voisinage de 0.
$\eta(x)=2P_n(x)O(1)+O\left(x^n\right)$
danger : on ne sait pas encore que η est un polynôme.
On a par division euclidienne $P_n^2(x)-x-1=x^nQ(x)+R(x)$ avec $d^\circ(R)<n$. D'après le calcul précédent $\eta(x)-Q(x)=\dfrac{R(x)}{x^n}$.
Par l'absurde si R est non nul $R(x)$ est équivalent , en 0 , à son terme de plus bas degré r_mX^m . Comme $d^\circ(R)<n$ on a $m<n$ et donc $(\eta(x)-Q(x))\sim_0 r_mx^{(<0)}$ qui tend vers l'infini et n'est donc pas borné au voisinage de 0 . Or η est bornée et Q est un polynôme donc est aussi borné : ABSURDE
$$\boxed{x^m\text{ divise }P_n(x)^2-x-1}$$

5.
   - Il existe un polynôme Q tel que $P_n(x)=1+x+x^nQ(x)$.si on prend $g=P_n(f)$ on a $g^2=Id+f+f^nQ(f)=Id+f$. Donc $Id+f$ admet une racine carrée.

- si $\alpha = 0$ $\alpha f + Id = Id$ admet des racines carrées . (Id est solution évidente)
- si $\alpha \neq 0$ on a avec les hypothèses sur f : $(\alpha f)^{p-1} \neq 0$ et $(\alpha f)^p = 0$. En appliquant le résultat précédent à αf on en déduit que $\alpha f + Id$ admet une racine carrée.
- Si $\beta > 0$ on peut écrire $f + \beta Id = \dfrac{1}{\beta} f + Id$. D'après le point précédent $\dfrac{1}{\beta} f + Id$ admet une racine carrée ϕ . $\sqrt{\beta}\phi$ est une racine carrée de $f + \beta Id$ (existe car $\beta > 0$)

Partie 4.B

1. $M = T - \lambda I_n$ est un matrice strictement triangulaire ($j \leq i \Rightarrow m_{i,j} = 0$) . Qui peut s'écrire par blocs $\begin{pmatrix} 0 & L \\ (0) & M' \end{pmatrix}$, $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ étant elle aussi strictement triangulaire et $L \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne. La matrice (0) étant une matrice colonne nulle.

   Montrons $(T - \lambda I_n)^n = 0$ par récurrence sur n :

   - si $n = 1$ $T = (\lambda)$ et $M = T - \lambda I_1 = (0)$
   - si $n = 2$, il existe a tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^2 = 0$
   - Supposant que toute matrice M' strictement triangulaire de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifie $M'^{n-1} = 0$

     On vérifie par récurrence $\begin{pmatrix} 0 & L \\ (0) & M' \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & LM'^{k-1} \\ 0 & M'^k \end{pmatrix}$ et donc $M^n = \begin{pmatrix} 0 & LM'^{n-1} \\ 0 & M'^n \end{pmatrix} = 0$

   $$\boxed{(T - \lambda I_n)^n = 0}$$

2. Le polynôme caractéristique de f est scindé , donc f est trigonalisable. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes diagonaux et λ est la seule valeur propre , donc tous les termes diagonaux de la matrice triangulaire sont des λ . T est du type précédent et donc $(T - \lambda I_n)^n = 0$ .et donc (traduction) $(f - \lambda Id)^n = 0$.

3. En prenant le plus petit p tel que $(f - \lambda Id)^p = 0$ (qui existe car tout sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément) on a $(f - \lambda Id)^{p-1} \neq 0$. $\phi = f - \lambda Id$ vérifie les hypothèses du IV.A)

   On en déduit d'après IV.A.5) que comme $\lambda > 0$, $f = \phi + \lambda Id$ admet une racine carrée.