MINES PC 2010 Math 2

A: Définition de $\mathbf{A}_z\mathbf{P}(\mathbf{X})$

On remarquera que la notation du sujet doit être manipulée avec précaution: A_z dépend aussi de n qui va varier au sein même de certaines questions.
L'hypothèse $n \geq 2$ assure l'existence de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}_{n-2}[X]$

1. On a pour tous $(P,Q) \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:
$$\begin{aligned} A_z(\lambda P+Q) &= (z-X)(\lambda P+Q)' + n(\lambda P+Q) \\ &= \lambda((z-X)P'+nP) + ((z-X)Q'+nQ) \\ &= \lambda A_z(P) + A_z(Q) \\ &\boxed{A_z \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X], \mathbb{C}[X])} \end{aligned}$$
de plus si $d^\circ(P) \leq n$ on a $d^\circ(P') \leq n-1$ et donc $d^\circ(A_z(P)) \leq n$ par théorème sur le degré d'un produit et d'une somme. On regarde alors le terme de degré n : si $P(X) = p_nX^n + R$ avec $d^\circ(R) < n$ alors , $A_n(P) = nzX^{n-1} + A_z(R)$ de degré $\leq (n-1)$.
$$\boxed{\mathrm{Im}(A_z) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]}$$

2. On a (avec le sujet qui précise bien le changement de n)
$$\begin{aligned} A_{z_1}(A_{z_2}(P)) &= (z_1-X)((z_2-X)P'+nP)' + (n-1))((z_2-X)P'+nP) \\ &= (z_1-X)((z_2-X)P" - P' + nP') + (n-1))((z_2-X)P'+nP) \\ &= (z_1-X)(z_2-X)P" + (n-1)(z_1+z_2-2X)P' + n(n-1)P \end{aligned}$$
z_1 et z_2 jouent des rôles symétriques dans la formule donc :
$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X], A_{z_1}(A_{z_2}(P)) = A_{z_2}(A_{z_1}(P))}$$

3. $\left((X-z)^k\right)_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{C}_n[x]$ donc $A_z\left((X-z)^k\right) = (n-k)(X-z)^k$ engendre l'image. On a donc
$$\mathrm{Im}(A_z) = \mathrm{Vect}\left((n-k)(X-z)^k\right)_{k=0}^n$$
. Pour $k=n$ on a un élément nul et pour $0 \leq k \leq n-1$ on a une famille étagée en degré donc une base de $\mathbb{C}_{n-1}[x]$. donc $\mathrm{Im}(A_z) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$. A_z est donc de rang n . le noyau est de dimension 1 et contient $(X-z)^n$
$$\boxed{\mathrm{Im}(A_z) = \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ , } \mathrm{Ker}(A_z) = \mathrm{Vect}\left((X-z)^n\right)}$$

4. La matrice de $\widehat{A_z}$ est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(n, n-1, \cdots 2, 1, 0)$,. D donne les éléments propres de $\widehat{A_z}$: on a $n+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes $(n-k)_{k=0}^n$ et chaque sous espace propre est une droite $E_{n-k} = \mathrm{Vect}\left((X-z)^k\right)$. On a $n+1$ valeurs propres en dimension $n+1$ donc l'endomorphisme est diagonalisable.

5. La méthode est générale si l'endomorphisme admet des valeurs propres 2 à 2 distinctes : Si $M = (m_{i,j})$ commutent avec $D = (d_i)$ on a $MD = DM$ et donc pour tous (i,j) $m_{i,j}d_j = d_im_{i,j}$. Donc pour $i \neq j$ on a $d_i \neq d_j$ et donc $m_{i,j} = 0$; M est diagonale , $M = \mathrm{diag}(m_{1,1}, m_{2,2} \cdots m_{n,n}, m_{n+1,n+1})$. Il existe alors un unique polynôme P de degré $\leq n$ vérifiant : $\forall i \in [[1, n+1]]$, $m_{i,i} = P(d_i)$: Il suffit de prendre les polynômes $(L_i)_{i=1}^{n+1}$ de Lagrange associés au (d_i) et de prendre $P = \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,i}L_i$.

   On prend pour D la matrice de $\widehat{A_z}$ et pour M celle de E.

   Réciproquement tout polynôme $P\left(\widehat{A_z}\right)$ commute avec $\widehat{A_z}$
$$\boxed{E \circ \widehat{A_z} = \widehat{A_z} \circ E \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ , } E = P\left(\widehat{A_z}\right)}$$

B : Définition de $\boldsymbol{\delta}_\xi$

Remarque: cette partie est une partie de géométrie. On associe à tout point de $\mathbb{R}^2$ son affixe. L'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ correspond ainsi à une application du plan (sauf l'origine) dans lui même $M \mapsto F(M)$, avec en cartésienne $(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2=y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ et en polaire $(\rho,\theta) \mapsto \left(\frac{1}{\rho}, -\theta\right)$.

On remarquera que $f^2 = Id$ et donc $f^{-1} = f$.

6. Soit $Z \in f(\mathcal{C})$, il existe donc $z \in \mathcal{C}$ tel que $Z = f(z) = \dfrac{1}{z}$. On a donc $\left\{ \begin{array}{r} z\overline{z} - (z_0\overline{z} + \overline{z_0}z) + |z_0|^2 - R^2 = 0 \\ z = \dfrac{1}{Z} \end{array} \right.$ et donc

$$\frac{1}{Z}\frac{1}{\overline{Z}} - \left(z_0\frac{1}{\overline{Z}} + \overline{z_0}\frac{1}{Z}\right) + \left(|z_0|^2 - R^2\right) = 0$$

On multiplie par $Z.\overline{Z}$ et on divise par $\left(|z_0|^2 - R^2\right) \neq 0$ (car $0 \in \mathcal{C}^+$ donc $|z_0| > R$) l'équation équivaut à :

$$Z.\overline{Z} - \frac{z_0 Z - \overline{z_0}\overline{Z}}{|z_0|^2 - R^2} + \frac{1}{|z_0|^2 - R^2} = 0$$

on pose $Z_0 = \dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}$ et on cherche R_0 tel que $\dfrac{1}{|z_0|^2 - R^2} = |Z_0|^2 - R_0^2$ soit :

$$R_0^2 = |Z_0|^2 - \frac{1}{|z_0|^2 - R^2} = \frac{|z_0|^2}{\left(|z_0|^2 - R^2\right)^2} - \frac{1}{|z_0|^2 - R^2} = \frac{R^2}{\left(|z_0|^2 - R^2\right)^2}$$

ce qui donne $R_0 = \dfrac{R}{|z_0|^2 - R^2}$.(tout est positif d'où le choix du signe dans la racine carrée)

et $f(C)$ à l'équation :

$$Z.\overline{Z} - \left(Z_0\overline{Z} + \overline{Z_0}Z\right) + |Z_0|^2 - R_0^2 = 0$$

On a donc :

$$|z - z_0|^2 = R^2 \iff |Z - Z_0|^2 = R_0^2$$

Donc Z décrit le cercle de centre $\dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2}$ et de rayon $\dfrac{R}{|z_0|^2 - R^2}$

Comme $|0 - Z_0| = \dfrac{|z_0|}{|z_0|^2 - R^2} > \dfrac{R}{|z_0|^2 - R^2} = R_0$, on vérifie bien que $O \in f(\mathcal{C})^+$

compléments dont j'aurais besoin par la suite : si $O \in \mathcal{C}^-$: le calcul sera sur le même principe avec $R_0 = \dfrac{-R}{|z_0|^2 - R^2}$, l'image du cercle sera toujours un cercle.
si $O \in \mathcal{C}$ on peut chercher l'image de $\mathcal{C} - \{O\}$, comme $|z_0|^2 = R^2$ il reste :

$$\frac{1}{Z}\frac{1}{\overline{Z}} - \left(z_0\frac{1}{\overline{Z}} + \overline{z_0}\frac{1}{Z}\right) = 0$$

soit :

$$z_0.Z + \overline{z_0}.\overline{Z} = 1$$

qui est l'équation d'une droite.

7. On peut reprendre le calcul précédent avec des inégalités strictes : $Z.\overline{Z}$ et $|z_0|^2 - R^2$ sont des réels positifs et ne changent pas le sens des inégalités lors des produits :

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 &< R^2 \iff z\overline{z} - (z_0\overline{z} + \overline{z_0}z) - R^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow Z.\overline{Z} - \left(Z_0\overline{Z} + \overline{Z_0}Z\right) + |Z_0|^2 - R_0^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow |Z - Z_0|^2 < R_0^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-}$$

Remarque : le sujet propose une démonstration plus géométrique, qui ne me semble pas utile : L'image de D_u est la demi droite issue de O symétrique de D_u par rapport à $y'0y$.
compléments : si $0 \in \mathcal{C}^-$ l'image de $\mathcal{C}^-$ (privé de 0) sera $f(\mathcal{C})^+$ car maintenant $|z_0|^2 - R^2 < 0$ et le sens de l'inégalité est changé. Si $0 \in \mathcal{C}$ on arrive à $z_0.Z + \overline{z_0}.\overline{Z} > 1$, c'est le demi plan ouvert limité par la droite $f(\mathcal{C})$ et ne contenant pas 0 .

8. Les$(z_i)_{i=1}^n$ sont dans $\mathcal{C}^-$ et 0 dans $\mathcal{C}^+$ donc pour tout $i \in [[1,n]]$ $,0 \neq z_i$, $\dfrac{1}{z_i}$ est donc défini ainsi que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}$.

   $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}$ est l'isobarycentre des $\left(\dfrac{1}{z_i}\right)_{i=1}^n$. Les (z_i) sont dans $\mathcal{C}^-$, donc les $\left(\dfrac{1}{z_i}\right)$ sont dans $f(\mathcal{C})^-$ (question 7) . Or un disque est convexe (si deux éléments sont dans $\mathcal{C}^-$ le segment qui les joint reste dans $\mathcal{C}^-$, et donc tout barycentre à coefficients positifs de points de $\mathcal{C}^-$ reste dans $\mathcal{C}^-$). donc $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}$ est dans $f(\mathcal{C})^-$. Comme $0 \in \mathcal{C}^+$ on a $0 \in f(\mathcal{C})^+$ (question 6) donc $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \neq 0$ et donc $\delta_0 = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}}$ est bien défini. C'est l'image par f d'un point de $f(\mathcal{C})^-$ donc $\delta_0 \in \mathcal{C}^-$ (en utilisant que $f\left(f(\mathcal{C})^-\right) = f\left(f\left(\mathcal{C}\right)\right)^- = \mathcal{C}^-$ car $f^2 = f$.

   Si on ne pense pas au barycentre on peut poser le calcul : si $f(\mathcal{C})$ est le cercle de centre Z_0 et de rayon R_0 : $\dfrac{1}{z_i} \in \mathcal{C}^- \Rightarrow \left|\dfrac{1}{z_i} - z_0\right| \leq R$. Et donc

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}\right) - Z_0\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{z_i} - Z_0\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left|\frac{1}{z_i} - z_0\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R_0 = R_0$$

$$\boxed{\delta_0 \text{ est défini et } \delta_0 \in \mathcal{C}^-}$$

   compléments pour la suite : si $0 \in \mathcal{C}$, on a toujours $\forall i \in [[1,n]]$ $,0 \neq z_i$, donc $\sum \dfrac{1}{z_i}$ est défini. Comme le demi plan $f\left(\mathcal{C}^-\right)$ reste un convexe ne contenant pas 0 δ_0 est toujours défini et élément de $\mathcal{C}^-$.

9. On se ramène à la question précédente par changement de repère en mettant l'origine en ξ . on pose $Z_i = z_i - \xi$. Le cercle $\mathcal{C}$ est alors centré en Z_0 et les points Z_i sont à l'intérieur du cercle. Le point $\delta_0 = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}}$ est défini , à l'intérieur du cercle. En revenant au repère initial $\delta_\xi = \xi + \delta_0 = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i - \xi}}$ est défini à l'intérieur du cercle.

$$\boxed{\delta_\xi \text{ est défini et } \delta_0 \in \mathcal{C}^-}$$

   complément pour la suite : le résultat reste vrai si $\xi \in \mathcal{C}$.

   C. condition d'apolarité

10. Comme on est dans $\mathbb{C}$, la dérivée logarithmique ne s'applique pas . On procède par récurrence :

    - Si $P(X) = (X - z_1)$ alors $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X - z_1}$
    - Si pour $Q(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$ on a $\dfrac{Q'(X)}{Q(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{X - z_i}$, on peut dériver $P(X) = Q(X)(X - z_n)$: $P'(X) = Q'(X)(X - z_n) + Q$ et donc $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{Q'(X)}{Q(X)} + \dfrac{1}{X - z_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - z_i)}$

    On en déduit avec la définition de δ :

$$\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = -\frac{1}{n}\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}$$

    d'où si $P'(\xi) \neq 0$ et si les hypothèses préalables à la question 9 sont vérifiés : :

$$\boxed{\delta_\xi = \xi - n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}}$$

11. Soit ξ tel que $A_z P(\xi) = 0$ c'est à dire $(z - \xi)P'(\xi) + nP(\xi) = 0$

    - si $P'(\xi) = 0$ alors $P(\xi) = 0$, ξ est racine de P : $\exists i, \xi = z_i$ et donc $\xi \in \{z_i, P'(z_i) = 0\}$
    - si $P'(\xi) \neq 0$, on a d'après la question précédente $\delta_\xi = \xi - n\dfrac{P(\xi)}{P'(\xi)} = \xi + n\dfrac{z - \xi}{n} = z$. Et on a $P(\xi) = \dfrac{-(z - \xi)P'(\xi)}{n} \neq 0$ donc $\xi \notin \{z_i\}$ et donc $\xi \in \{\xi \in \mathbb{C} - \{z_i\}, \delta_\xi = z\}$

Réciproquement:

- si $\xi \in \{z_i, P'(z_i) = 0\}$ on a $P(\xi) = P'(\xi) = 0$ donc $A_z P(\xi) = 0$
- si $\xi \in \{\xi \in \mathbb{C} - \{z_i\}, \delta_\xi = z\}$
  - si $P'(\xi) \neq 0$ on a $\xi - n\dfrac{P(\xi)}{P'(\xi)} = z$, d'où $(z - \xi) P'(\xi) + nP(\xi) = 0$ et $A_z(\xi) = 0$
  - si $P'(\xi) = 0$ la relation $\dfrac{1}{\delta_\xi - \xi} = -\dfrac{1}{n}\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)} = 0$ montre que δ_ξ ne serait pas défini.

12. On peut décomposer $P(X)$ dans la base de vecteurs propres $\left((X-z)^k\right)_{k=0}^{n}$: $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-z)^i$. Alors $A_z(P) = \sum_{i=0}^{n} (n-i) \lambda$. $A_z P$ est de degré $< n-1$ si et seulement si $\lambda_{n-1} = 0$.

    Pour calculer λ_{n-1} on garde dans la relation les termes de degré n et $n-1$:

    - D'après le théorème sur la somme des racines :de P
    $$P(X) = X^n - X^{n-1} \sum_{i=1}^{n} z_i + (d^\circ < (n-1))$$
    - D'après le binôme de Newton :
    $$\lambda_n (X-z)^n + \lambda_{n-1} (X-z)^{n-1} = \lambda_n \left(X^n - nzX^{n-1}\right) + \lambda_{n-1} + (d^\circ < (n-1))$$

    et donc
    $$\lambda_n = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} z_i = nz\lambda_n - \lambda_{n-1}$$
    on vérifie bien :
    $$\lambda_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = nz$$
    $$\boxed{d^\circ(A_z P) < (n-1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = nz}$$

13. Si les z_i sont tous dans $\mathcal{C}_1^-$, alors par convexité de $\mathcal{C}_1^-$, le barycentre $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$ est encore dans $\mathcal{C}_1^-$, et donc comme $z \notin \mathcal{C}_1^-$, $\sum_{i=1}^{n} z_i \neq nz$ et donc $d^\circ(A_z P) = (n-1)$.

    Vu son degré, $A_z(P)$ admet $n-1$ racines. Si ξ est une de ses racines on a d'après Q11:

    - $\exists i, \xi = z_i$ (et $P'(z_i) = 0$) et donc $\xi = z_i \in \mathcal{C}^-$
    - $\delta_\xi = z$. On a donc $\delta_\xi \notin \mathcal{C}_1^-$, donc en prenant la contraposée de Q9 : $\xi \notin C_1^+$.

    $$\boxed{A_z P \text{ a } n-1 \text{ racines qui ne sont pas dans } \mathcal{C}_1^+}$$

    reste à exclure $\xi \in \mathcal{C}$, et je n'ai pas réussi à éviter tous les compléments dans le cas où l'origine (puis ξ) est sur le cercle :

    Si $\xi \in \mathcal{C}$ et $(z_i) \subset \mathcal{C}^-$ on a encore $\delta_\xi \in \mathcal{C}^-$. Donc ici si $\delta_\xi \notin \mathcal{C}_1^-$ alors $\xi \notin \mathcal{C}_1$.

    $$\boxed{A_z P \text{ a } n-1 \text{ racines qui ne sont dans } \mathcal{C}_1^-}$$

    italique : un corrigé trouvé sur internet s'en sort en introduisant des cercles $\mathcal{C}_1$ de même centre que $\mathcal{C}$ et de rayon un tout petit peu plus petit.

14. Supposons (par l'absurde) que tous les z_i' soit dans $\mathcal{C}\cup\mathcal{C}^+$: Toutes les racines de P sont dans $\mathcal{C}^-$, donc d'après la question précédente $A_{z_n'}P$ est de degré $n-1$ et admet toutes ses racines dans $\mathcal{C}^-$.

   Par récurrence si $A_{z_{p+1}'}A_{z_{p+1}'}\cdot A_{z_n'}P$ est de degré p et admet toutes ses racines dans $\mathcal{C}^-$, alors $A_{z_p'}A_{z_{p+1}'}\cdot A_{z_n'}P$ est de degré $p-1$ et admet toutes ses racines dans $\mathcal{C}^-$.

   On arrive ainsi à $A_{z_2'}\cdots A_{z_n'}P$ est de degré 1.On vérifie que le début de la question 13 reste vrai si $d^\circ(P)=1$ et donc $A_{z_1'}\cdots A_{z_n'}P$ est de degré 0. Absurde car c'est le polynôme nul.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est apolaire par rapport à } Q \text{ , l'un des } z_i' \text{ est dans } \mathcal{C}^-}$$

15. En calculant l'intégrale on constate qu'une solution est :

$$\begin{aligned} b_{n-i} &= (-1)^{i-1}\int_0^1 (a+t\,(b-a))^{i-1}\,dt = \frac{(-1)^{i-1}}{b-a}\int_a^b u^{i-1}du \text{ en posant } u=a+t\,(b-a) \\ &= \frac{(-1)^{i-1}}{b-a}\frac{b^i-a^i}{i} \end{aligned}$$

16. On a

$$\Delta(X)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}b_iX^{n-i}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{(-1)^{n-i-1}}{b-a}\frac{b^{n-i}-a^{n-i}}{n-i}X^i$$

   et

$$(X-a)^n-(X-b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\left(a^{n-i}-b^{n-i}\right)X^i$$

   Pour $i=n$ le terme est nul . pour $i<n$ on a $\dfrac{1}{n-i}\dbinom{n-1}{i}=\dfrac{1}{n-i}\dfrac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}=\dfrac{1}{n}\dfrac{n!}{i!(n-i)!}=\dfrac{1}{n}\dbinom{n}{i}$. Donc :

$$\Delta(X)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\frac{a^{n-i}-b^{n-i}}{b-a}X^i=\frac{1}{n.(b-a)}\left((X-a)^n-(X-b)^n\right)$$

$$\boxed{\Delta(X)=\frac{1}{n.(b-a)}\left((X-a)^n-(X-b)^n\right)}$$

17. D'après le résultat admis et la formule de Q15 : :

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}A_{t_1}\cdots A_{t_{n-1}}\Delta(X) &= \int_0^1 P'\left(a+t(b-a)\right)dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b P'(u)du=\frac{P(b)-P(a)}{b-a}=0 \text{ (hypothèse sur } P\text{)} \end{aligned}$$

   Comme P est de degré n on a $a_{n-1}\neq 0$ et donc $A_{t_1}\cdots A_{t_{n-1}}\Delta(X)=0$

   D'après Q14 , P' admet donc une racine dans tout disque ouvert contenant les racines de Δ .

   Mais

$$\Delta(z)=0\Leftrightarrow (z-a)^n=(z-b)^n$$

   Comme $a\neq b$, $z=a$ n'est pas racine , donc $\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)^n=1$, on a une racine $n-$ème de l'unité : $\dfrac{z-b}{z-a}=e^{i\theta}$ avec $\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$, $k\in[[0,n-1]]$

   si $\theta=0$ $\dfrac{z-a}{z-b}=1$ n'est pas possible.

   si $\theta\neq 0$ $z-a=e^{i\theta}\left(z-b\right)$ soit

$$z=\frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

   On a donc :

$$z-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{a-b}{2}\frac{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}=\frac{a-b}{2}\frac{i.\cos(\theta/2)}{\sin\left(\theta/2\right))}$$

On a donc $\left|z - \dfrac{a+b}{2}\right| = \left|\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|$ avec $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in [[1, n-1]]$.$\theta \to \text{cotan}(\theta)$ est décroissante de $+\infty$ à -∞ sur $]0, \pi[$, le maximum de $|\text{cotan}(\theta/2)|$, avec $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in [[1, n-1]]$ est donc $\left|\text{cotan}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right|$ ou $\left|\text{cotan}\left(\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)\right|$. Les deux quantités sont égales.

Toutes les racines de Δ sont dans tout disque ouvert de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\rho > \dfrac{|a-b|}{2}\dfrac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$.

P' admet donc au moins une racine dans tout disque ouvert de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\rho > \dfrac{|a-b|}{2}\dfrac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$.

En particulier pour tout N il existe z' une racine de P' vérifiant $\left|z' - \dfrac{a+b}{2}\right| < \dfrac{|a-b|}{2}\dfrac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)} + \dfrac{1}{N}$. Si on fait tendre N vers 0 on a :

$$\boxed{\left|z' - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{|a-b|}{2}\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}}$$

A priori il y a une racine dans chaque disque , donc z' peut dépendre de N . Mais comme un polynôme admet un nombre fini de racines, il existe une racine (indépendante de N) qui convient pour une infinité de N , et donc qui permet de passer à la limite.

J'ai un peu l'impression que l'on peut simplifier le sujet en jouant un peu mieux entre disque ouvert et fermé aux questions 13 et 14.