Théorème de Rolle dans le cas complexe .

Dans ce problème on se propose de prouver l'analogue complexe suivant du théorème de Rolle :

Théorème 1. *Soient a et b deux nombres complexes distincts et n un entier $\geqslant 2$. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que $P(a) = P(b)$. Le polynôme dérivé $P'(X)$ de P possède alors au moins un zéro z_0 (ie $P'(z_0) = 0$) dans le disque*

$$D_{a,b;n} = \Big\{ z \in \mathbb{C};\ |z - \frac{a+b}{2}| \leqslant R_n(a,b) \Big\},$$

où

$$R_n(a,b) = \frac{|a-b|}{2} \, \frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}.$$

Soit $P(X) = \sum_{l=0}^{N} u_l X^l \in \mathbb{C}[X]$, le polynôme dérivé $P'(X)$ de $P(X)$, est donné par :

$$P'(X) = \sum_{l=0}^{N-1} u_{l+1}(l+1) X^l \,.$$

Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

A. Définition de $A_z P(X)$.

On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $z \in \mathbb{C}$. On définit le polynôme $A_z P \in \mathbb{C}[X]$ par la formule :

$$A_z P(X) = (z - X)P'(X) + nP(X).$$

Cette définition de A_z dépend donc de l'espace de départ $\mathbb{C}_n[X]$.

1) Vérifier que A_z définit une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

2) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Prouver que :

$$A_{z_1}\Big(A_{z_2} P\Big)(X) = A_{z_2}\Big(A_{z_1} P\Big)(X),$$

où dans la composition $A_{z_1} \circ A_{z_2}$ (du membre de gauche), A_{z_2} est vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et A_{z_1} est vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$. Pareillement, dans la composition

$A_{z_2} \circ A_{z_1}$ (du membre de droite), A_{z_1} est vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et A_{z_2} est vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$.

3) Pour $z \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que $A_z P(X)$ soit le polynôme nul. (On pourra utiliser la famille formée par les polynômes $(X - z)^k, 0 \leqslant k \leqslant n$). Déterminer alors l'image de l'application

$$A_z : \mathbb{C}_n[X] \mapsto \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et sous espaces propres de l'endomorphisme $\widehat{A_z}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \widehat{A_z}(P)(X) = (z - X)P'(X) + nP(X).$$

Montrer que $\widehat{A_z}$ est diagonalisable.

5) On conserve les notations de la question précédente. Soit E un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ commutant avec $\widehat{A_z}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $Q(\widehat{A_z}) = E$. (On pourra utiliser un polynôme associé à une interpolation de Lagrange convenable).

B. Définition de δ_ξ.

On considère la bijection f :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \mapsto & \frac{1}{z} = f(z) \end{array}$$

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$. On désignera par $\mathcal{C}$ un cercle (de centre z_0 et de rayon R non nul) de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = R\}.$$

On notera respectivement $\mathcal{C}^-$ et $\mathcal{C}^+$ l'intérieur géométrique et l'extérieur géométrique de $\mathcal{C}$. Plus précisément :

$$\mathcal{C}^- = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < R\},\ \mathcal{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| > R\}.$$

6) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre z_0 et de rayon $R > 0$ tel que l'origine 0 appartient à $\mathcal{C}^+$. On pose $z_0 = re^{i\alpha}$ où $r \in]R, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Prouver que $f(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de r, α, R. Vérifier en outre que l'origine 0 appartient à $f(\mathcal{C})^+$. (On pourra partir de

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = z\overline{z} - z_0\overline{z} - z\overline{z_0} + z_0\overline{z_0} = R^2.)$$

7) On conserve les hypothèses et notations de la question précédente. Prouver que $f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-$. C'est à dire que f transforme l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ en la totalité de l'intérieur du cercle $f(\mathcal{C})$ (on pourra utiliser le fait *admis* suivant. Un point u de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ appartient à $\mathcal{C}^-$ si et seulement si la demi-droite D_u issue de 0 et passant par u rencontre $\mathcal{C}$ en deux points distincts A, B tels que u appartient au segment *ouvert* $]A, B[$. On pourra alors considérer $f(D_u)$).

Soient $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, non nécessairement deux à deux distincts.

Soit $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}$ tel que $\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}$ est *non nul*. On considère *alors* le nombre complexe δ_ξ défini par

$$\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi} \ . \tag{1}$$

8) Soit $\mathcal{C}$ un cercle tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$. Montrer que si l'origine 0 appartient à $\mathcal{C}^+$ alors δ_0 est bien défini et appartient à $\mathcal{C}^-$ (on pourra commencer par prouver que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(z_i)$ appartient à $f(\mathcal{C})^-$).

9) Soit $\mathcal{C}$ un cercle tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$. Montrer que si $\xi \in \mathcal{C}^+$ alors δ_ξ est bien défini et appartient à $\mathcal{C}^-$.

C. Condition d'apolarité.

Dans cette partie, $z_1, \cdots, z_n$ désigneront n nombres complexes non nécessairement deux à deux distincts.

10) Soit $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ et

$$\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}.$$

Exprimer $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)}$ en fonction des $\dfrac{1}{\xi - z_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. En déduire que si $P'(\xi)$ est non nul alors

$$\delta_\xi = \xi - n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$$

où δ_ξ est défini par (1).

11) Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i) \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Montrer que l'ensemble des zéros $\xi \in \mathbb{C}$ de $A_z P(X)$ est la réunion des deux ensembles suivants :
– $\{z_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ P'(z_i) = 0\}$.
– $\{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\},\ \delta_\xi = z\}$, où δ_ξ est défini par (1).

12) On conserve les notations de la question précédente. Montrer que

$$z = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j$$

si et seulement si le degré de $A_z P(X)$ est strictement inférieur à $n - 1$.

13) On considère le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}_1$ tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}_1^-$ et $z \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1^+$. Prouver alors que $A_z P(X)$ est *exactement* de degré $n - 1$. Puis prouver que les $n - 1$ zéros de $A_z P(X)$ (en comptant les multiplicités) appartiennent tous à $\mathcal{C}_1^-$ (on pourra utiliser les questions 9 et 11).

On considère deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré n,

$$P(X) = u \prod_{i=1}^{n}(X - z_i), \text{ et } Q(X) = v \prod_{i=1}^{n}(X - z'_i),$$

où $u, v \in \mathbb{C}^*$ et z_i, z'_i désignent respectivement les zéros de $P(X)$ et $Q(X)$.
On dira que P est *apolaire par rapport à Q* si $A_{z'_1} A_{z'_2} \cdots A_{z'_n} P(X) = 0$. Quand on écrit $A_{z'_1} A_{z'_2} \cdots A_{z'_n}$ dans cet ordre on utilise la convention décrite dans la question 2. Plus précisément, $A_{z'_n}$ est vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, $A_{z'_{n-1}}$ est vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$, ..., $A_{z'_1}$ est vu comme application de $\mathbb{C}_1[X]$ vers $\mathbb{C}$. Ainsi $A_{z'_1} A_{z'_2} \cdots A_{z'_n} P(X)$ est une constante.

14) On suppose que P est apolaire par rapport à Q. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$ alors il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $z'_i \in \mathcal{C}^-$ (on utilisera la question précédente).

Dans la suite, on fixe a, b deux points distincts de $\mathbb{C}$.

15) Montrer qu'il existe $b_0, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ que l'on calculera, tels que pour tout polynôme du type

$$T(X) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 X + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1},$$

on ait $\int_0^1 T(a + t(b-a))dt =$

$$a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0.$$

Avec les notations de la question précédente, on fixe n un entier supérieur ou égal à deux et on pose

$$\Delta(X) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 X + \cdots + \binom{n-1}{n-2} b_{n-2} X^{n-2} + b_{n-1} X^{n-1}.$$

16) Montrer que $\Delta(X) = C_n\big((X-a)^n - (X-b)^n \big)$ où C_n est une constante non nulle que l'on calculera.

Soit $P(X) \in \mathbb{C}_n[X]$ de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(a) = P(b)$. On écrit

$$P'(X) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 X + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1}.$$

On désigne par $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ les zéros (comptés avec multiplicité) de $P'(X)$. On admet que la constante $(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \ldots A_{t_{n-1}} \Delta(X)$ est égale à :

$$a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0\,.$$

17) Montrer que $\Delta(X)$ est apolaire par rapport à $P'(X)$ (on pourra utiliser la question 15). En déduire alors le **Théorème 1** (on pourra appliquer la question 14).

FIN DU PROBLÈME