E3A PC 2010 Math 1

On le voit sur un exemple au III , la transformée de Laplace permet de transformer certains type d'équations différentielles en équation plus simple. A ce titre elle est très utilisée en sciences de l'ingénieurs pour résoudre des équations différentielles.

Partie I : définition de la transformée de Laplace

1.

   1. C'est une fonction de référence donc on a une question de cours:
      - $t \to e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$
      - Pour $X > 0$ et $x \neq 0$ on a $\displaystyle\int_0^X e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\left[-e^{-xt}\right]_0^X = \frac{1}{x}(1 - e^{-xX})$

        Comme $x > 0$ $\displaystyle\lim_{X->+\infty}(e^{-xX}) = 0$ donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}}$$

   2. Soit la propriété au rang n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt$ converge et vaut $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$
      - La propriété est vérifiée pour $n = 0$.
      - Supposons la vérifiée pour un entier n.

        - la fonction $t \to t^{n+1}e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$
        - On pose $u = t^{n+1}, v' = \exp(-xt)$ et donc $u' = (n+1)t^n$, $v = \dfrac{\exp(-xt)}{-x}$, u et v sont définies C^1 car $x \neq 0$

$$\int_0^T t^{n+1}e^{-xt}dt = \left[\frac{t^{n+1}e^{-xt}}{x}\right]_0^T + \frac{n+1}{x}\int_0^T t^n e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}T^n e^{-xT} + \frac{n+1}{x}\int_0^T t^n e^{-xt}dt.$$

        Comme $x > 0$, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} T^n e^{-xT} = 0$ et $\displaystyle\int_0^T t^n e^{-xt}dt$ admet une limite finie. donc $\displaystyle\int_0^T t^{n+1}e^{-xt}dt$ admet une limite finie en $+\infty$ et :

$$I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}I_n(x) = \frac{n+1}{x}\frac{n!}{x^n} = \frac{(+1n)!}{x^{n+2}}.$$

        La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall x > 0 \text{ , } I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

2.

   1. critère de sous espace vectoriel:
      - E : est un sous ensemble non vide de $C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$.(il contient la fonction nulle avec $A = 0, n = 0, C = 0$
      - $C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
      - . Si $(f, g) \in E$ on a :$\begin{cases} \exists A_f, \exists C_f, \exists n_f \text{ , } \forall x \geq A_f \text{ , } |f(t)| \leqslant C_f t^{n_f} \\ \exists A_g, \exists C_g, \exists n_g \text{ , } \forall x \geq A_g \text{ , } |g(t)| \leqslant C_g t^{n_g} \end{cases}$ .On prend une combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ .Pour $t \geq \max(A_f, A_g)$

$$|\lambda f(t) + \mu g(t)| \leq |\lambda| C_f t^{n_f} + |\mu| C_g t^{n_g}$$

        - On prend $n = \max(n_f, n_g)$ on a alors $n_f \leq n$ donc $t^{n_f} \leq t^n$ pour $t \geq 1$.
        - On prend $A = \max(A_f, A_g, 1)$, pour $t \geq A$ on a :

$$|\lambda f(t) + \mu g(t)| \leq (|\lambda| C_f + |\mu| C_g) t^n$$

        - On prend $C = (|\lambda| C_f + |\mu| C_g)$

$$\exists A, \exists C, \exists n \text{ , } \forall x \geq A \text{ , } |\lambda f(t) + \mu g(t)| \leq Ct^n$$

      - et donc :

$$\boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})}$$

   Remarque : pas facile à rédiger à cause des 3 $\exists$, et de l'obligation de tenir compte de la position de t par rapport à 1 .

2. On prend $A=0, n=0, C=\sup\limits_{[0,+\infty[}(|f|)$

3. Soit $P(t)=\sum\limits_{i=0}^{d} p_i t^i$. On prend $A=1$ .Pour $t\geq 1$, $t^i\leq t^d$ et donc $\left|\sum\limits_{i=0}^{d} p_i t^i\right| \leq \sum\limits_{i=0}^{d} |p_i|\, t^d$. On prend $n=d$ et $C=\sum\limits_{i=0}^{d}|p_i|$

$$\boxed{\text{Les fonctions polynômes sont dans } E}$$

3.

1. Si $f\in E$ alors
   - f est continue
   - et $t^2\left|f(te^{-xt}\right|\leq Ct^{n+2}e^{-xt}$ tend vers 0 car $x>0$

$$\boxed{\text{si } x>0 \text{ , } t\to f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$$

2. Soit $F(x)=\int_I f(x,t)dt$ avec $x\in J$

   Si:
   - $\forall t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur J,
   - $\forall x\in J$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux intégrable sur I
   - on a domination sur tout segment $\{a,b]$ inclus dans J: $\exists\varphi$ intégrable sur I telle que $\forall x\in[a,b],\forall t\in I$ $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$

   alors
   - $F(x)=\int_I g(x,t)dt$ est continue sur J.

3.
   - on a bien la continuité de $x\to f(t)e^{-xt}$,
   - L'intégrabilité de $t\to f(t)e^{-xt}$ découle de la question **a)**
   - Pour $x\in[a,b]\subset]0,+\infty[$ et $t\geq 0$ on a $\left|f(t)e^{-xt}\right|\leq|f(t)|e^{-at}$ qui est bien intégrable en reprenant le résultat du **a)** avec $x=a$.

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$$

4. $\mathcal{L}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale et l'image d'une fonction de E est continue à valeurs réelles.

$$\boxed{\mathcal{L}\in\mathcal{L}\left(E,C^0\left(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right)\right)}$$

partie II : propriétés de la transformée de Laplace

1. 1.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(x)| &\leqslant \int_0^{+\infty}|f(t)|e^{-xt}dt \text{ (majoration de la valeur absolue d'une intégrale)}\\
&\leqslant \int_0^{A}|f(t)|e^{-xt}dt+\int_A^{+\infty}|f(t)|e^{-xt}dt \text{ (relation de Chasles)}\\
&\leq \int_0^{A}|f(t)|e^{-xt}dt+\int_A^{+\infty}Ct^ne^{-xt}dt \ \text{ (car } f\in E \text{)}\\
&\leqslant \int_0^{A}|f(t)|e^{-xt}dt+\int_0^{+\infty}Ct^ne^{-xt}dt \text{ (l'intégrale d'une fonction positive est positive)}\\
&\leqslant \int_0^{A}|f(t)|e^{-xt}dt+C\frac{n!}{x^{n+1}} \ \textbf{ (I.1.b)}
\end{aligned}$$

   D'où la majoration voulue.

2. Puisque f est continue sur le **segment** $[0,A]$ elle y est bornée. Et donc en s'inspirant de la question précédente :

$$\int_0^A|f(t)|e^{-xt}dt\leqslant\sup_{[0,A]}(|f|)\int_0^A e^{-xt}dt\leqslant\sup_{[0,A]}(|f|)\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{\sup_{[0,A]}(|f|)}{x}$$

   qui tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3. Le majorant de **1.a** est la somme de deux fonctions de limite nulle :

$$\boxed{\lim_{+\infty} (\mathcal{L}(f)) = 0}$$

2. Dérivation d'une intégrale à paramètre . Avec les notations de **I.3.b:**

1. Si
   - $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur J
   - $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux intégrables sur J
   - on peut dominer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur tout segment inclus dans J

   alors
   - $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est C^1 sur J et $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

     application:
   - $x \to f(t)e^{-xt}$, est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$de dérivée $x \to -tf(t)e^{-xt}$,
   - $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (déjà prouvé pour la continuité)
   - on a domination $\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, $\forall t \geq 0$ $\left|-tf(t)e^{-xt}\right| \leq t\,|f(t)|\,e^{-xt}$ qui est bien une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $t^2 t\,|f(t)|\,e^{-xt} \leq Ct^{n+3}e^{-xt}$ (pour $x \geq A$)a une limite nulle en $+\infty$
   - $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (à cause de la domination)

     et donc :

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } (\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \left(-tf(t)e^{-xt}\right) dt}$$

1. Une intégration par partie donne en posant $u = e^{-xt}, v' = f'$ et donc $u' = -xe^{-xt}, v = f$ (avec l'hypothèse supplémentaire u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$).

$$\int_0^X f'(t)e^{-xt}dt = f(X)e^{-xX} - f(0) + x\int_0^X f(t)e^{-xt}dt$$

Comme f et f' sont dans E les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ convergent et pour $X \geq A/x$, $|f(X)e^{-xX}| \leqslant CX^n e^{-xX}$ qui tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$.
On peut passer à la limite et on vérifie bien

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$$

2. h est bien continue et comme $f' \in E$ il existe des constantes A', C' et n' telles que pour $t \geq A'$, $|f'(t)| \leqslant C't^{n'}$.
On a donc $|h(t)| = |tf'(t)| \leqslant C't^{n'+1}$ pour $t \geqslant A'$, donc $h \in E$ (pour $A = A', C = C', n = n' + 1$)
Une intégration par parties donne en posant : $u = te^{-xt}, v' = f'$ donc $u' = e^{-xt} - xte^{-xt}$

$$\begin{aligned}\int_0^X tf'(t)e^{-xt}dt &= Xf(X)e^{-xX} - \int_0^X \left(f(t)e^{-xt} - xtf(t)e^{-xt}\right) dt \\ &= Xf(X)e^{-xX} - \int_0^X f(t)e^{-xt}dt + x\int_0^X tf(t)e^{-xt}dt\end{aligned}$$

$h \in E$, $f \in E$ et donc (comme pour h) $t \to tf(t) \in E$, les trois intégrales admettent une limite en $+\infty$. et comme $f \in E$: $|Xf(X)e^{-xX}| \leqslant CX^{n+1}e^{-xX}$ tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. On peut passer à la limite

$$\boxed{\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x\,(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

.

3. On applique deux fois le résultat du **II.3.a** (à f' puis à f):

$$\mathcal{L}(f'')(x) = x\mathcal{L}(f')(x) - f'(0) = x\,[x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)] - f'(0)$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{L}(f'')(x) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0)}$$

application à une équation différentielle

1. Le théorème de Cauchy s'applique:
   - les fonctions $t \mapsto -t$ et $t \mapsto 2p$ sont continues sur $\mathbb{R}$
   - le coefficient de y'' ne s'annule pas.

     Il y a une unique solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

2. De $f''(t) - tf'(t) + 2pf(t) = 0$ on déduit par linéarité de $\mathcal{L}$ (avec les notation du **II**) que

$$\mathcal{L}(f'')(x) - \mathcal{L}(h)(x) + 2p\mathcal{L}(f)(x) = 0$$

mais avec **II3.C)** on a $\mathcal{L}(f'')(x) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - x$, vue les conditions initiales.
et avec **II.3.B on a** $\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x\left(\mathcal{L}(f)\right)'(x)$
d'où

$$\left[x^2\mathcal{L}(f)(x) - x\right] - \left[-\mathcal{L}(f)(x) - x\left(\mathcal{L}(f)\right)'(x)\right] + 2p\mathcal{L}(f)(x) = 0$$

soit:

$$x\left(\mathcal{L}(f)\right)' + (x^2 + 2p + 1)\mathcal{L}(f)(x) = x$$

$\boxed{U = \mathcal{L}(f) \text{ est donc bien solution de } (J) \text{ sur }]0, +\infty[}$.

3.
   1. On pose $u' = t^{2n+1}, v = e^{t^2/2}, u = \dfrac{t^{2n+2}}{2n+2}, v' = te^{t^2/2}$

$$f_n(x) = \int_0^x t^{2n+1}e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = [\frac{t^{2n+2}}{n+2}e^{\frac{t^2}{2}}]_0^x - \frac{1}{2n+2}\int_0^x t^{2n+3}e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2n+2}f_{n+1}(x)$$

   soit

$$\boxed{f_{n+1}(x) = x^{2n+2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - (2n+2)f_n(x)}$$

   2. On vérifie la relation par récurrence :
      - $f_0(x) = \displaystyle\int_0^x te^{t^2/2}dt = \left[e^{t^2/2}\right]_0^x = e^{x^2/2} - 1$ et pour $k = 0$ $(-1)^k \dfrac{2^k}{(0-k)!}1x^{0-2k} = 1$. La relation est vrai pour $n = 0$
      - Si

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}$$

      on a

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= x^{2n+2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - (2n+2)f_n(x) \\
&= x^{2n+2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - (2n+2)\left((-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}\right) \\
&= x^{2n+2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - (-1)^{n+1}2^{n+1}(n+1)! - (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^{k+1}}{(n-k)!}x^{2n-2k}
\end{aligned}$$

      on prend $k = K - 1$ dans le Σ :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= x^{2n+2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - (-1)^{n+1}2^{n+1}(n+1)! - (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{K=1}^{n+1}(-1)^{K-1}\frac{2^K}{(n+1-K)!}x^{2(n+1)-2K} \\
&= x^{2n+2}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + (-1)^{(n+1)+1}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)!e^{x^2/2}\sum_{K=1}^{n+1}(-1)^K\frac{2^K}{(n+1-K)!}x^{2(n+1)-2K}
\end{aligned}$$

      le premier terme rentre dans le Σ en prenant $K = 0$. La relation est donc vérifiée au rang $n + 1$.

$$\boxed{f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}}$$

4.

1. L'équation homogène associée à (J) est $xu'(x)+\left(x^2+(2p+1)\right)u(x)=0$. On a donc :

$$u(x)=K\exp\left(-\int\left(x+\frac{2p+1}{x}\right)dx\right)=K\exp(-\frac{x^2}{2}-(2p+1)\ln(x))=Kx^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{une base est } x->x^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

2. On fait une variation de la constante : si $u(x)=\lambda(x)x^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, on obtient $\lambda'(x)=x^{2p+1}\exp\left(\frac{x^2}{é}\right)$.
Une solution est $\lambda(x)=f_p(x)$

$$\begin{aligned} u(x) &= Kx^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\left((-1)^{p+1}2^pp!+p!e^{x^2/2}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}x^{2p-2k}\right)x^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \left(K+(-1)^{p+1}2^pp!\right)x^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}x^{-1-2k}\end{aligned}$$

En prenant comme constante d'intégration $C=\left(K+(-1)^{p+1}2^pp!\right)$ on obtient

$$\boxed{u(x)=Cx^{-(2p+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}x^{-1-2k}}$$

5. On prend donc $U_0=p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}x^{-1-2k}$.

1. Avec le calcul du **I;1.b** on a:

$$U_0(x)=p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{x^{2k+1}(p-k)!}=p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k)!(p-k)!}\int_0^{+\infty}t^{2k}e^{-xt}dt=\mathcal{L}(R_0)(x)$$

si R_0 est la restriction de

$$\boxed{R(x)=p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k)!(p-k)!}x^{2k}}$$

On peut intégrer termes à termes sans problème car la somme a un nombre fini de termes.

2. L'examinateur doit attendre la vérification par le calcul que R est solution :
pour tout t réel :

$$\begin{aligned} R(t) &= p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k)!(p-k)!}t^{2k}\\ R'(t) &= p!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k-1)!(p-k)!}t^{2k-1}\\ R"(t) &= p!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k-2)!(p-k)!}t^{2k-2}=p!\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(2k)!(p-k-1)!}t^{2k}\end{aligned}$$

donc

$$R"'t)-tR'(t)+2pR(t)=p!\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(2k)!(p-k-1)!}t^{2k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k-1)!(p-k)!}t^{2k}+2p\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(2k)!(p-k)!}t^{2k}\right)$$

le terme de degré p se simplifie dans les deux termes de droites et le reste se simplifie avec les trois termes.
R est solution de l'équation différentielle et $R(0)=\frac{p!}{p!}=1$, $R'(0)=0$

3. On peut prouver le résultat de façon théorique en prouvant que R_0 est bien solution sur $\mathbb{R}^+$ puis en utilisant la parité de R :
   $R_{\,0}$ vérifie $R_0(0)=1$ et $R_0'(0)=0$. Donc en reprenant le calcul de la question 1 l'image par $\mathcal{L}$ de $R_0"(t)+tR'(t)+2pR_0(t)$ est nulle . Donc le polynôme est dans le noyau de $\mathcal{L}$.
   Mais si $P=\sum_{i=0}^{d} p_iX^i$ on a $\mathcal{L}(P)=\sum_{i=0}^{d}\int_0^{+\infty} p_it^ie^{-tx}dt=\sum_{i=0}^{d} p_i\dfrac{i!}{x^{i+1}}$ (calcul du **I.1.b) .** Si cette expression on a en multipliant par x^{d+1} : $\sum_{i=0}^{d} p_ii!x^{d-i}=0$. c'est un polynôme en x nulle . ses coefficients sont nuls donc comme $i!\neq 0$, $\forall i, p_i=0$. donc R_0 est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   On peut alors passer à $\mathbb{R}$ par parité : On sait que $\forall t\geq 0$, $R"(t)-tR'(t)+2pR(t)=0$. On prend $t<0$ et on applique la relation précédente en $-t$: $R"(-t)+tR'(-t)+2pR(-t)=0$.
   Mais $R(-t)=R(t)$ vue l'expression de R , et donc en dérivant $R'(-t)=-R(t)$ et $R"(-t)=R"(t)$ et donc pour $t<0$ on a aussi $R"(t)-tR'(t)+2pR(t)=0$.
   R est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle , et vérifie bien la condition initiale. D'après l'unicité rappelée à la question **III.1**
   $$\boxed{R \text{ est la solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (\mathcal{P})}$$

injectivité de la transformée de Laplace

1. La limite est l'intégrale impropre qui converge d'après la première partie en $x=1$.
   $$\boxed{L=\mathcal{L}(f)(1)}$$
   .
2. g est dans E par **I.2.b:**
   - g est continue car c'est une primitive de fonction continue
   - g est bornée sur $\mathbb{R}_+$:
   $$|g(t)|\leqslant\int_0^t|f(s)|e^{-s}ds\leqslant\int_0^{+\infty}|f(s)|e^{-s}ds$$
   l'intégrale impropre existe car $s\mapsto f(s)e^{-s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (**I.3.a** pour $x=1$).
   $$\boxed{g\in E}$$
3.
   1. g est dérivable comme primitive d'une fonction continue et $g'(t)=f(t)e^{-t}$.
      g' est dans E car :
      - g' est est continue
      - $|g'(t)|\leqslant|f(t)|\leqslant Ct^n$ pour $t\geqslant A$.
      On applique le **II.3.a**:(g et g' sont dans E)
      $$\mathcal{L}(g')(x)=x\mathcal{L}(g)(x)-g(0)=x\mathcal{L}(g)(x)$$
      donc pour $x>0$:
      $$\mathcal{L}(g)(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-t}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(x+1)t}dt=\frac{1}{x}\mathcal{L}(f)(x+1)$$
   2.
      1. φ est continue sur $]0,1]$ car ln et g sont continues. Elle est aussi continue en 0 car $\lim_{u\to 0} g(-\ln u)=\lim_{t\to+\infty} g(t)=L$.
      2. Pour $x>0$ la fonction $t\mapsto g(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et le changement de variable $t=-\ln(u)$ est C^1 , bijectif de $]0,1]$ sur $]0,+\infty]$; on peut donc écrire:
      $$\int_0^{+\infty}g(t)e^{-xt}dt=\int_0^1 g(-\ln(u))u^x\frac{1}{u}du=\int_0^1\varphi(u)u^{x-1}du$$

4. On utilise **3.b :** $\displaystyle\int_0^1 \varphi(u)u^n du = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(n+1)t}dt$ puis **3.a :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-(n+1)t}dt = \mathcal{L}(g)(n+1) = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}(f)(n+2) = 0$ puisque $\mathcal{L}(f) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \int_0^1 \varphi(u)u^n du = 0$$

5. 1. $\cos(p\pi u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}$ de rayon de convergence infini.

   2. On veut intégrer termes à termes : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}\varphi(u)du.$

      Les fonctions sont continues sur le segment $[0,1]$, on peut utiliser la convergence normale:

      - $\forall n$, $u -> (-1)^n \dfrac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}\varphi(u)$ est continue sur $[0,1]$
      - la série converge normalement sur $[0,1]$ car $\left|(-1)^n \dfrac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}\varphi(u)\right| \leq \dfrac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!} \sup\limits_{[0,1]}(|\varphi|)$, terme général d'une série converge (pensez à $(p\pi)$) . Le sup existe car φ est continue sur un segment.
      - On peut intégrer termes à termes , mais chaque terme est nulle d'après la question précédente.

      $$\boxed{\int_0^1 \cos(p\pi u)\,\varphi(u)du = 0}$$

      Remarque : si on veut étudier la série $\displaystyle\sum \int_0^1 \left|(-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}\varphi(u)\right| du$ *on écrit :*

      $$\int_0^1 \left|(-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}u^{2n}\varphi(u)\right| du \leq \int_0^1 \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}1.\sup(|\varphi|)\,du = \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!}\sup(|\varphi|)$$

   3. 1. ψ est continue sur $[-1,1]$ car elle est paire et φ est continue sur $[0,1]$. Par période 2 elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

      2. Comme la fonction est paire $b_n(\varphi) = 0$. La fonction 2−périodique donc : $a_n = \displaystyle\int_0^2 \psi(t)\cos(n\pi u)du$. On utilise la parité $a_n = 2\displaystyle\int_0^1 \psi(t)\cos(n\pi u)du = 0$ d'après **5.b**.

         L'égalité de Parseval entraîne alors $2\displaystyle\int_0^2 (\psi(u))^2du = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p^2 = 0$. Par continuité de ψ on en déduit $\psi = 0$ sur $[0,2]$ donc sur $\mathbb{R}$ par période.

         danger :Pour utiliser Dirichlet ou la convergence normale , il faudrait une fonction C^1_{pm} . Il faut donc étudier la dérivabilité de φ en 0^+ . Mais en posant $s = -\ln(u)$ on arrive à $\varphi'(u) = -f(s)$ qui peut ne pas avoir de limite finie en $+\infty$.

   4. On en déduit que φ est la fonction nulle sur $[0,1]$, donc g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est nulle,

      $$\boxed{f \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}_+}$$

   5. On a montré que $\mathcal{L}(f) = 0$ entraîne que $f = 0$; le noyau de $\mathcal{L}$ est donc réduit à 0: l'application linéaire $\mathcal{L}$ est bien injective.