CCP PC 2010 , math II parties 1 et 3

PARTIE 1

1. $\mathcal{D}$ contient tous le réels sauf les entiers strictement négatifs. Les fonctions u_n sont donc toutes définies sur $\mathcal{D}$ pour $n \geq 1$.

   De plus on a l'équivalent entre suites positives : $\dfrac{1}{(n+x)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc par comparaison à une série de Riemann (2>1)

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \text{ est définie}}$$

2.

   1. On vérifie par récurrence : $\forall x \in \mathcal{D}$, $u_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}$:

      - si $p = 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$, $u_n^{(0)}(x) = \dfrac{(-1)^0(1)!}{(n+x)^{2+0}}$ est bon.
      - si $p = 1$, $\forall x \in \mathcal{D}$, $u_n'(x) = \dfrac{-2}{(n+x)^3} = \dfrac{(-1)^1(1+1)!}{(n+x)^{2+1}}$
      - si $\forall x \in \mathcal{D}$, $u_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}$ alors

$$\forall x \in \mathcal{D}, u_n^{(p+1)}(x) = (-1)^p(p+1)!\left(\frac{1}{(n+x)^{2+p}}\right)' = (-1)^p(p+1)!\left(\frac{-(p+2)}{(n+x)^{2+p+1}}\right) = \frac{(-1)^{p+1}(p+2)!}{(n+x)^{2+(p+1)}}$$

      - et donc on a bien :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathcal{D} \ , \ u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}}$$

   2. pour $n \geq 1$: $x -> (n+x)^{2+p}$ est croissante positive sur $[a,b]$ car $(n+x)$ est toujours positif. et donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b] \ , \ \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \left|u_n^{(p)}(a)\right|$$

      le majorant est indépendant de x et $\sum \left|u_n^{(p)}(a)\right|$ converge car $\left|u_n^{(p)}(a)\right| \sim (p+1)!\dfrac{1}{n^{p+2}}$ avec $p+2 > 1$.

$$\sum u_n^{(p)} \text{ converge normalement sur } [a,b] \subset]-1,+\infty[$$

   3. On a toutes les hypothèses du théorème de dérivation termes à termes :

      - $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.
      - $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty[$.
        et donc

$$\boxed{U \in C^\infty\left(]-1,+\infty[,\mathbb{R}\right)}$$

3.

   1.

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{((n-N)+(x+N))^2} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+x)^2} \text{ en posant } m = n-N \\ &= U_N(x) + U(x+N) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \ , \ U(x) = U_N(x) + U(x+N)}$$

2. Si $x \in]-N-1,-N[$, $x+N \in]-1,0[$ et donc $x \to U(x+N)$ est C^∞ sur $]-N-1,-N[$, par composition de fonction C^∞.U_N est une somme d'un nombre fini de fonctions C^∞ sur $]-N-1,-N[$, donc est C^∞ sur ce domaine. Donc par somme de fonctions C^∞, $U \in C^\infty\left(]-N-1,-N[,\mathbb{R}\right)$.
Comme $\mathcal{D} = (\cup_{N\in\mathbb{N}^*}]-N-1,N[) \cup]-1,+\infty[$, U est C^∞ sur $\mathcal{D}$.
3. D'après le théorème de dérivation termes à termes du **I.2.3.** on a,vue la convergence normale, sur $]-1,+\infty[$,

$$U^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}} = (-1)^p(p+1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{2+p}}$$

Si on se place sur $]-N-1,N[$:

$$U(x) = U_N(x) + (U(x+N))$$

- U_N est une somme finie de fonctions C^∞ , et on peut donc dériver termes à termes $U_N^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}$
- On a $\frac{d}{dx}\left(U(x+n)\right) = U'((x+n)$ donc par récurrence immédiate : $(U(x+n))^{(p)} = U^{(p)}(x+N)$ et donc :

$$(U(x+n))^{(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x+N)^{2+p}} = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}$$

en ajoutant les 2 on a $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}$
par réunion des intervalles :

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, U^{(p)}(x) = (-1)^p(p+1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{2+p}}}$$

Sur $]-N-1,N[$, on ne sait pas si on a convergence normale ou pas. On ne peut pas dériver termes à termes sans précaution.

4. sur $]-N-1,-N[$ et sur $]-N,-N+1[$ on a $U(x) = U_N(x)+U(x+N) = \frac{1}{(N+x)} + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+x)^2} + U(x+N)$. comme U est continue en 0 (question I.2.3) et que $x \to \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+x)^2}$ est continues en $-N$ (somme de frantions rationnelles à dénominateur non nul) , $\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+x)^2} + U(x+N)$ admet une limite finie en $x=-N$, alors que $\frac{1}{(N+x)^2}$ tend vers $+\infty$. donc

$$\boxed{U(x) \sim_{x\to -N} \frac{1}{(N+x)^2}}$$

5.

1. D'après le calcul de dérivée au **3.2.** on a $U^{'}(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^3} < 0$ pour $x > -1$. donc :

$$\boxed{U \text{ décroît strictementsur }]-1,+\infty[}$$

2. soit $\phi : t \to \frac{1}{(t+x)^2}$. La fonction ϕ est décroissante sur $]-x,+\infty[$ donc sur $[0,+\infty[$ (car $x>0$), donc sur chaque segment $[n,n+1]$ pour $n \geq 0$:

$$\forall t \in [n,n+1] \ , \ \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(n+x)^2}$$

on intègre la relation sur $[n,n+1]$

$$\forall n \quad \geq \quad 1 \ , \ u_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1}\frac{dt}{(t+x)^2} \leq u_n(x)$$

$$\text{et pour } n \quad = \quad 0 : \ u_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1}\frac{dt}{(t+x)^2}$$

On a donc :

- d'une part pour $n \geq 1$: $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{(t+x)^2} \leq u_n(x)$. On peut sommer de 1 à N :

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq U_N(x)$$

on fait le changement de variable $C^1 : T = t + x$:

$$\int_{x+1}^{N+x+1} \frac{dT}{T^2} \leq U_N(x)$$

et si N tend vers $+\infty$:

$$\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dT}{T^2} \leq U(x)$$

- d'autre part pour $n \geq 0$: $u_{n+1}(x) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+x)^2}$ soit pour $n \geq 1$, $u_n(x) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{(t+x)^2}$ d'où $U_N(x) \leq \displaystyle\int_0^N \frac{dt}{(t+x)^2} =$

et par passage à la limite

$$U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dT}{T^2}$$

Mais $\displaystyle\int_x^y \frac{dT}{T^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \to_{y \to +\infty} \frac{1}{x}$ donc

$$\forall x > 0 \ , \ \frac{1}{x+1} \leq U(x) \leq \frac{1}{x}$$

donc par encadrement comme $\dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x+1}$:

$$\boxed{U(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}}$$

Les 5/2 peuvent utiliser l'intégrabilité des fonctions , mais n'oubliez pas que dans ce cas il faut dire que le changement de variable est C^1 bijectif.

6. On sépare les termes pairs et les termes impairs . Les deux séries $\sum \dfrac{1}{(2k+x)^2}$ et $\sum \dfrac{1}{(2k-1+x)^2}$ sont toutes les deux convergentes car le terme général est défini positif et équivalent à $\dfrac{1}{4k^2}$.Donc pour $x \in \mathcal{D}$: :

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+x)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1+x)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x/2)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+(-1+x)/2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4}\left(U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \ , \ U(x) = \frac{1}{4}\left(U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) \right)}$$

PARTIE II

elle porte sur les intégrales à paramètres

PARTIE III

voir les graphes à la fin

1. g est continue, C^1_{pm} sur $[-\pi, \pi[$,
   Par période g est continue en π^- donc en π^+ et $g(\pi) = g(-\pi) = -\pi/2 = \lim_{\pi^-}(g)$,
   donc g est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc sur $\mathbb{R}$ par période.
   sur $[0, \pi[$, $g'(x) = -1$ admet une limite finie en π^- . Donc g est C^1_{pm} sur une période donc sur $\mathbb{R}$.
   g est continue , 2π périodique C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$ donc développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$

2.

1. g est paire donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } b_n(f) = 0}$$

2. On a toujours avec la parité :
   - $a_0(g) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$
   - pour $n > 0$:
   $$a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx) dx$$
   on peut intégrer par parties : $u = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $u' = -1$, $v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $v' = \cos(nx)$, comme $n \neq 0$, u, v sont bien C^1 sur $[0, \pi]$
   $$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . \frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx) dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi} . \frac{1}{n^2}\left[-\cos(nx)\right]_0^\pi = \frac{2\left(1 - (-1)^n\right)}{\pi n^2} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } n = 2k \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)^2} \text{ si } n = 2k-1 \text{ est impair} \end{array} \right. \end{aligned}$$

   On a donc :
   $$\boxed{S_g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\cos\left((2k-1)x\right)}{\pi(2k-1)^2}}$$

3.

1. On écrit que $S_g(0) = g(0)$ d'après la question 1. On a donc $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k-1)^2}$ soit
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. On a :
$$U(-1/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}$$
En appliquant $I.6$ en $x = 0$ on a $4U(0) = U(0) + U(-1/2)$ donc $U(0) = U(-1/2)/3 = \pi^2/6$
$$\boxed{U(-1/2) = \pi^2/2 \text{ , } U(0) = \pi^2/6}$$

remarque $U(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *est classique.*

remarque : avec $I.3.1$ *on peut calculer* $U(N)$ *pour* $N \in \mathbb{N}$ *et* $U(N-1/2)$ *pour* $N \in \mathbb{Z}$

4. La fonction g étant continue par morceaux on peut appliquer la formule de Parseval :
$$\frac{a_0(g)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(g)^2 + b_n(g)^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 dt$$
ici
$$\frac{a_0(g)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(g)^2 + b_n(g)^2\right) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$
et
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}^2 - \pi t + t^2 dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi^3}{2} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

Comme les 3 séries convergent on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

d'où : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}}$$

5.

1. On a $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$ et donc $g(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} g(t)dt = \int_0^x g(-u)\,(-du) = -\int_0^x g(u)du = -G(x)$ car g est paire.
   remarque : les autres primitives de g ne sont pas impaires.
   On a $G(x+2\pi) = \displaystyle\int_0^{x+2\pi} g(t)dt = G(x) + \int_x^{x+2\pi} g(t)dt.$
   Mais g est 2π périodique donc $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} g(t)dt = \int_0^{2\pi} g(t)dt = \pi a_0(g) = 0$. Donc $G(x+2\pi) = G(x)$

   $$\boxed{G \text{ est impaire } 2\pi \text{ périodique}}$$

   remarque : le calcul montre que la primitive d'une fonction h continue 2π périodique est aussi 2π périodique , si et seulement si $a_0(h) = 0$

2. g étant continue 2π périodique et C^1_{pm} la série de Fourier de g converge normalement vers g . On a une série de fonctions continue qui converge normalement, on peut donc l'intégrer termes à termes :

   $$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\cos((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^2}$$

   ce qui donne en prenant les primitives nulles en 0(par hypothèse $G(0) = 0$) :

   $$G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\sin((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^3}$$

   La série précédente converge toujours normalement , donc sa somme est développable en série de Fourier et les coefficients sont les coefficients de Fourier :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ a_n(G) = 0 \ , \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ b_{2k}(G) = 0, b_{2k+1}(G) = \frac{4}{\pi\,(2k-1)^2}}$$

   On peut aussi donner les $a_n(G)$ par parité , et faire une intégration par partie dans $b_n(G)$ qui donnera $\dfrac{a_n(g)}{n}$

3. On utilise de nouveau la formule de Parseval avec G continue par morceaux , 2π périodique :

   $$\frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} G(t)^2 dt$$

   Or :

   $$\forall x \in [0, \pi[\ , \ G(x) = \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} G(t)^2 dt &= \int_0^{x} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^{x} \left(\frac{\pi^2}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x^3 + \frac{x^4}{4}\right) dx \\ &= \frac{\pi^5}{12} - \frac{\pi^5}{8} + \frac{\pi^5}{20} = \frac{\pi^5}{120}\end{aligned}$$

on a donc :

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{2}{\pi}.\frac{\pi^5}{120}$$

soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

et donc par convergence des séries, en séparant les termes pairs et impairs. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{2^6}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6} + \frac{\pi^6}{960}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}}$$