



EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs.

On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -n, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

I.1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur \mathcal{D} .

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ la somme partielle d'ordre } n \text{ et } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \text{ le reste correspondant. On a donc } R_n = U - U_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.2.

I.2.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de u_n à l'ordre p . Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq -n$.

I.2.2. Soient a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b$. Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

I.2.3. Dédurre de ce qui précède que U est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

I.3.

I.3.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x + N)$.

I.3.2. En déduire que U est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -N - 1, -N[$, puis sur \mathcal{D} .

I.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, établir une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

I.4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

I.5.

I.5.1. Montrer que U est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.

I.5.2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $U(x) = \frac{1}{4} \left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) \right]$.

PARTIE III

Soit g la fonction d'une variable réelle x , périodique de période 2π , telle que :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[, \quad g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

Soit $\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g) \cos nx + b_n(g) \sin nx)$ la somme de la série de Fourier de g .

III.1. Préciser pourquoi g est égale en tout point de \mathbb{R} à la somme de sa série de Fourier.

III.2.

III.2.1. Calculer $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.2. Calculer $a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3.

III.3.1. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

III.3.2. En déduire la valeur de $U(-\frac{1}{2})$, puis celle de $U(0)$.

III.4. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

III.5. On note G la primitive de g telle que $G(0) = 0$.

III.5.1. Montrer que G est impaire, périodique de période 2π .

III.5.2. Calculer les coefficients de Fourier de G .

Préciser pourquoi G est égale en tout point de \mathbb{R} à la somme de sa série de Fourier.

III.5.3. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Fin de l'énoncé