problème 1
Mines d'Ales... 2009
spécifique MPSI
problème 2

16)

On pose $z = x + iy$ une racine carrée de $-3+4i$. On a alors le système $\left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 3 \text{ avec la partie réelle} \\ x^2 + y^2 = 5 \text{ avec le module} \\ 2xy = 4 \text{ avec la partie imaginaire} \end{array}\right.$ On a alors $x = \pm 1$, $y = \pm 2$ avec les deux premières équations , et le signe avec la troisième.

$$\boxed{z = \pm (1+2i)}$$

Pour $U(X)$ on a $\Delta = -3+4i$ et donc $r = \dfrac{(1-2i) \pm (1+2i)}{2}$

$$\boxed{U(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, 2i\}}$$

17) Révisez les coniques en traitant cette question en temps libre.

- Γ_1 a une équation : $x^2 - y^2 + x + 2y = 0$ Elle se met sous la forme : $\left(\dfrac{x+1/2}{2/\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{y-1}{2/\sqrt{3}}\right)^2 = 1$. C'est une hyperbole de centre $\Omega\,(-1/2, 1)$ d'axes horizontal et vertical et d'excentricité $\sqrt{2}$.Ses asymptotes passent par le centre et ont une pente de ± 1
- Γ_1 a une équation : $2xy - 2x - +y - 2 = 0$.C'est une courbe du second ordre. . Le centre annule le gradient , c'est Ω . Dans le repère translaté l'équation de la courbe est $xy = 1/2$. C'est une hyperbole d'asymptotes les axes du nouveau repère. Les axes de l'hyperboles sont donc d'angle polaire $\pm\pi/4$ (les bissectrices) . On fait donc une rotation d'angle $\pi/4$ qui donne l'équation $X^2 - Y^2 = 1$, ... l'excentricité est $\sqrt{2}$.
- Sur la figure on fait attention au fait que les 2 hyperboles se coupent en 2 points tels que l'image par U soit de partie réelle et de partie imaginaire nulle. Les points d'intersection ont pour affixe les racines de $U(X) = 0$.

18) On prend deux polynômes P_1 et P_2 et un scalaire λ .
Le point important pour la linéarité de f est la linéarité des applications qui à P associent le quotient et le reste de la division euclidienne. C'est la conséquence de l'unicité du quotient et du reste :

$$\forall P_0 \in \mathbb{C}[X], \exists! (Q_0, R_0) \in \mathbb{C}[X]^2, P_0(X^2) = Q_0(X)T(X) + R_0(X) \text{ avec } d^\circ(R_0(X)) < d^\circ(T(X))$$

Par division euclidienne : $P_1(X^2) = T(X)Q_1(X) + R_1(X)$, $P_2(X^2) = T(X)Q_2(X) + R_2(X)$ et $(P_1 + \lambda P_2)(X^2) = T(X)Q_3(X) + R_3(X)$av
$\overset{\circ}{d}(R_i(X)) < \overset{\circ}{d}(T(X))$. Et donc par combinaison linéaire

$$(P_1 + \lambda P_2)(X^2) = T(X)(Q_1 + \lambda Q_2)(X) + (R_1 + \lambda R_2)(X))$$

D'après le degré d'une somme $d^\circ((R_1 + \lambda R_2)(X)) < d^\circ(T(X))$, l'expression précédente est donc aussi la division euclidienne de $(P_1 + \lambda P_2)(X^2)$ par $T(X)$. et donc $Q_3(X) = Q_1(X) + \lambda Q_2(X)$ et $R_3(X) = R_1(X) + \lambda R_2(X)$. et donc

$$f(P_1 + \lambda P_2) = Q_3(X) + XR_3(X) = (Q_1(X) + \lambda Q_2(X)) + X(R_1(X) + \lambda R_2(X)) = f(P_1) + \lambda f(P_2)$$

Les deux application qui à $P(X)$ associent $Q(X)$ et $R(X)$ sont donc linéaires. f est donc aussi linéaire.

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])}$$

19) La linéarité de f_n découle de celle de f . Il faut vérifier $\mathrm{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$:On suppose $d^\circ(P) \leq n$.
Regardons les degrés dans la division euclidienne : $P(X^2) = Q(X)T(X) + R(X)$

- Si $Q(X) \neq 0$, $d^\circ(R(X)) < d^\circ(T(X)) \leq d^\circ(Q(X)T(X))$ et donc $\overset{\circ}{d}(Q(X)T(X) + R(X)) = \overset{\circ}{d}(Q(X)) + n$, $d^\circ(Q(X)) \leq d^\circ(P(X^2) -$
- Si $Q_0(X) = 0, d^\circ(Q(X)) \leq n$
  de plus $d^\circ(R(X)) \leq n-1$ donc $d^\circ(XR(X)) \leq n$. Donc par degré d'une somme $d^\circ(f(P(X)) \leq n$.

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$$

Remarque : Il y aune erreur dans le sujet : f_n est l'endomorphisme induit pas la restriction.
L'abus de vocabulaire est peut-être inévitable dans un sujet de sup si "induit" n'est pas au programme.
20) si :

- $P=1$ alors $1=0.X^2+1$ donc $Q=0,R=1$ donc $f(1)=X$
- $P=X$ alors $X^2=1.X^2+0$ donc $Q=1,R=0$ donc $f(X)=1$
- $P=X^2$ alors $X^4=X^2.X^2+0$ donc $Q=X^2,R=0$ donc $f(X^2)=X^2$
- Soit
$$A=Mat(f)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Sans problème $A^2=I_3$. A est donc inversible d'inverse A , et f_2 est une symétrie et est son propre inverse.
21) On reconnaît le polynôme U de la question 19 . les racines de $U(X)$ sont -1 et $2i$. Celles de $U(X^2)$ sont donc $\pm i$ et $\pm(1+i)$. Les racines de $T(X)$ sont racines de $U(X)$. donc $T(X)$ divise $U(X^2)$. Le reste $R(X)$ est nul et en regardant les racines manquantes et le coefficient dominant $Q(X)=(X+1+i)(X-i)$

$$\boxed{f(u)=(X+1+i)(X-i)=X^2+X+(1-i)}$$

Il est presque aussi rapide de développer les polynômes et de poser la division euclidienne comme pour f_3 . Mais comme le sujet donne le polynôme factorisé , il veut orienter vers les racines.
22) On calcule encore l'image de la base:

- Si $P=1$ on a $1=0.\left(X^3+X^2+a\right)+1$ donc $f(1)=X$
- Si $P=X$ on a $X^2=0.\left(X^3+X^2+a\right)+X^2$ donc $f(X)=X^3$
- Si $P=X^2$ on a $X^4=(X-1).\left(X^3+X^2+a\right)+(X^2-aX+a)$ donc
$$f(X^2)=(X-1)+X(X^2-aX+a)=-1+(a+1)X-aX^2+X^3$$
- Si $P=X^3$ on a $X^6=(X^3-X^2+X-(a+1)).\left(X^3+X^2+a\right)+((2a+1)X^2-aX+(a+a^2))$ donc
$$\begin{aligned}f(X^2)&=(X^3-X^2+X-(a+1))+X((2a+1)X^2-aX+(a+a^2))\\&=-(a+1)+(a^2+a+1)X+(-a-1)X^2+(2a+2)X^3\end{aligned}$$

  Si on place en colonne l'image des vecteurs de base on a bien :
$$B=\begin{pmatrix}0&0&-1&-a-1\\1&0&a+1&a^2+a+1\\0&0&-a&-a-1\\0&1&1&2a+2\end{pmatrix}$$

23) par développement $\det=a^2-1$. Mais je n'utilise pas cette valeur pour respecter le cadre du programme du D.S.
24)On fait un Pivot de Gauss
On retranche $(a+1)C_1+C_2$ à C_3 et $\left(a^2+a+1\right)C_1+(2a+2)C_2$ à C_4 on a
$$B_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&-a-1\\1&0&0&0\\0&0&-a&-a-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

On retranche $(a+1)\,C_3$ à C_4 on a :
$$B_2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&a^2-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Si on permute les lignes pour les mettre dans l'ordre $\begin{pmatrix}L_2\\L_4\\L_1\\L_3\end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&-a&a^2-1\end{pmatrix}$

$$\boxed{B\text{ inversible si et seulement si }a^2=\pm 1}$$

25) **si** $a=-1$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le rang est 3 est $C_1 = C_4$. Donc l'image est donnée par l'image des trois premièrs polynômes de base :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}\left(X, X^3, -1+X^2+X^3\right)}$$

$C_4 - C_1 = 0$ donne un polynôme du noyau . et le théorème du rang dit que le noyau est une droite.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}(X^3-1)}$$

f_3 est une application qui envoie des polynômes sur des polynômes. Le noyau et l'image sont donc des polynômes. Donner leurs matrices dans la base est un bon avancement de l'étude mais n'est pas la réponse atttendue.

Les vecteurs de base de l'image et du noyau donnent la matrice : $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On fait un pivot de Gauss en changeant l'ordre des lignes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On retranche la seconde colonne aux deux suivantes . Le rang est 4 ; l'union des deux bases est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\boxed{\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}\,(f_3) \oplus \mathrm{Im}(f_3)}$$

26) Si $d^\circ(P(X)) < n/2$ alors $d^\circ(P(X^2)) < n$ et donc la division euclidienne donne une décomposition $P(X^2)) = 0T(X) + P(X^2)$ avec $d^\circ(P(X^2)) \leq d^\circ(T(X))$, comme il y a unicité on a $Q(X)=0$ et $R(X)=P(X^2)$ ce qui donne : $f(P(X)) = XP(X^2) \neq 0$ (car $P(X) \neq 0$)

27) Si P est dans le noyau on a la division euclidienne $P(X^2) = Q(X)T(X) + R(X)$ et $f(P(X)) = 0$ donc $Q(X) + XR(X) = 0$ soit $Q(X) = -XR(X)$ et donc $P(X^2)) = R(X)\,(1-XT(X))$. $R(X)$ étant le reste de la division euclidienne on a bien $d^\circ(R(X)) < n$.
Réciproquement si $P(X^2)) = R_1(X)\,(1-XT(X))$ avec $d^\circ(R_1(X)) < n$ on a $P(X^2) = (-XR_1(X))\,T(X) + R_1(X)$ avec $d^\circ(R_1(X)) < n$.C'est la forme de la division euclidienne avec la condition sur le degré du reste. Donc $Q(X) = XR_1(X)$ et $R(X) = R_1(X)$, d'où $F(P(X)) = 0$

$$\boxed{P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \exists R_1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\ ,\ P = R_1(X)\,(1+XT(X))}$$

Remarque : j'ai noté $P(X^2)) = R_1(X)\,(1-XT(X))$. En général ceux qui ont traité la question on posé $P(X^2)) = R(X)\,(1-XT(X))$ et n'ont pas vu que dans la réciproque on ne sait plus que $R(X)$ est le reste euclidien.

28) On regarde le degré en remarquant que $d^\circ(XT(X)) = n+1 > d^\circ(1)$. Le degré de la somme est donc exactement le plus grand des degrés.

$$2d^\circ\,(P) = d^\circ(R_1(X)\,(1+XT(X))) = d^\circ(R_1[X]) + (1 + d^\circ(T(X))) \leq (n-1)+1+n = 2n$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}_n[X]}$$

29) Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$, il existe $R(X), d^\circ(R(X)) < n$ tel que $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$
Soit $P_1(X) = X^k P(X)$ on a $P_1(X^2) = X^{2k}R(X)\,(1-XT(X))$. reste à vérifier la condition sur le degré : $d^\circ(X^{2k}R(X)) < n$?
La condition $d^\circ(P(X)) + k \leq n$ impose $d^\circ(P(X^2)) \leq 2n-2k$. Le relation entre les degrés dans $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$ donne $d^\circ(R(X)) = d^\circ(P(X^2)) - (n+1) \leq n-2k-1$.
On a donc $d^\circ(X^{2k}R(X)) \leq n-1 < n$. Donc il existe $R_1(X) = X^{2k}R(X)$ vérifiant les 2 conditions $P_1(X^2) = R_1(X)\,(1-XT(X))$ et $d^\circ(R_1(X)) < n$ .Donc $P_1 \in \mathrm{Ker}(f)$

$$\boxed{\forall P(X) \in \mathrm{Ker}(f), \forall k \leq n - d^\circ(P(X))\ ,\ X^k P(X) \in \mathrm{Ker}(f)}$$

30)
a) Il existe un polynôme non nul dans le noyau. donc il existe un élément non nul dans I. I est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$: il admet un plus petit élément.
b) En regardant le quotient des coefficients dominants , on peut choisir c pour que dans $P_1(X) - cP_0(X)$ le coefficient dominant se simplifie. On a alors $P_1(X) - cP_0(X)$ un élément du noyau (car SEV) , de degré $< d^\circ(P_0)$. Le degré de $P_1(X) - cP_0(X)$ n'est donc pas dans I . Donc $P_1(X) - cP_0(X) = 0$
c) Même principe :

- Soit $P(X) = S(X)P_0(X)$ avec $d^\circ(S) \leq n-d$. On peut décomposer $S(X) = \sum_{i=0}^{n-d} s_i X^i$. Si on utilise Q29 . on a $P_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $d^\circ(P_0) = d$ donc $P_0(X), XP_0(X), \cdots X^{n-d}P_0(X)$ sont dans le noyau de f . Et donc par combinaison linéaire $P(X) = \sum_{i=0}^{n-d} s_i X^i P_0(X) \in \mathrm{Ker}(f)$

- Si $P(X)$ est dans le noyau on écrit la division euclidienne $P(X) = Q(X)P_0(X) + R(X)$ avec $d^\circ(R(X)) < d^\circ(P_0(X))$. Comme $P(X) \in \mathrm{Ker}(f)$, $d^\circ(P(X)) \leq n$ et donc $d^\circ(Q(X)) \leq n-d$. Donc en prenant $S = Q$ dans le point précédent on a que $Q(X)P_0(X)$ est dans le noyau , donc aussi $R(X) = P(X) - Q(X)P_0(X)$.

  Comme à la question précédente $R \in \mathrm{Ker}(f)$ et $d^\circ(R) < d$ impose $R = 0$

$$\boxed{P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R}_{n-d}[X] \ , \ P = SP_0}$$

31) C'est l'exemple de la question 25 ($a = -1$) .On sait que le noyau est inclus dans $\mathbb{R}_3[X]$; or dans $\mathbb{R}_3[X]$ on a trouvé les polynômes du noyau de f_3: ce sont les multiples de $\left(X^3 - 1\right)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1) = \mathrm{Ker}(f_3)}$$

N'allez pas trop vite : Le noyau d'une restriction (d'un endomorphisme induit) est souvent strictement plus petit que celui de l'application initiale.
Prenez une projection sur F de direction G . Le noyau est G , mais celui de la restriction à un S.E.V. H sera $G \cap H$.
Les question 32..35 vous donnent une occasion de réviser le produit scalaire.
On constate en particulier que la matrice A est orthogonale alors que g n'est pas une isométrie. C'est du au fait que la base de calcul n'est pas orthonormée.