Problème 2.

On notera $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On confondra polynôme et fonction polynôme. On notera $\deg(P(X))$ le degré d'un polynôme $P(X)$.

I Etude d'un polynôme.

16 Soit $U(X)$ le polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$ suivant : $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$.

a) Donner les racines carrées de $-3+4i$.

b) Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $U(X)$.

17 Soit le complexe z, $z = x+iy$ avec x et y réels.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $U(z)$ en fonction de x et de y.

b) Soit le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.)

i) Soit Γ_1 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est imaginaire pur. Donner la nature de Γ_1, son centre et son excentricité. Tracer Γ_1.

ii) Soit Γ_2 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est réel. Donner sa nature et son centre. Tracer Γ_2 sur le même dessin que Γ_1.

II Définition d'une application.

Soit n un entier naturel non nul fixé pour toute la suite du problème. Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)+XR(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a donc $P(X^2) = Q(X)T(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$). On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

18 Montrer que f est une application linéaire.

19 Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

20 Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = X^2$.

a) Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

21 Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = (X-1-i)(X+i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$ par l'application f.

III Etude d'un cas particulier.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3+X^2+a$.

22 Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

23 Calculer le déterminant de f_3.

24 Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

25 Dans cette question $a = -1$.

a) Donner une base de $\ker f_3$, le noyau de f_3.

b) Donner une base de $\operatorname{Im} f_3$, l'image de f_3.

c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

IV Etude du noyau.

26 Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que : $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.

27 Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que : $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.

28 En déduire que si $P(X)$ est un élément du noyau de f alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

29 Déduire de la question **27** que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(P(X))+k \leq n$ alors $X^k P(X)$ appartient au noyau de f.

30 On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a) Montrer que I possède un plus petit élément d.

b) Soit $P_0(X)$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $P_1(X)$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Montrer qu'il existe c de $\mathbb{C}$ tel que $P_1(X) = cP_0(X)$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(X)$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $S(X)$ de degré inférieur ou égal à n-d tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

31 On suppose dans cette question que $T(X) = X^3+X^2-1$. Donner le noyau de f.

V Etude d'un produit scalaire.

Dans cette partie on prendra $T(X) = X^2$ et on considérera $g = f_2$ la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.

32 Montrer que g est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$. Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

33 Soit $< . , .>$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall\ (U(X), V(X)) \in \mathbb{R}_2[X]^2, <U(X), V(X)> = U(1)\times V(1)+U'(1)\times V'(1)+U''(1)\times V''(1).$

(Où $U'(X)$ et $V'(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées de $U(X)$ et $V(X)$ et $U''(X)$ et $V''(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées secondes de U et V.)

Montrer que $< . , . >$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

34 Montrer que la matrice A de g sur la base canonique est une matrice orthogonale. (C'est-à-dire $A\times {}^tA=I_3$ où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité.)

35 L'application g est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $< . , . >$? On pourra calculer $< 1, 1>$ et $<g(1), g(1)>$.