Concours commun Mines-Pont
PC 2009 , Math 2

On remarque que les expressions étudiées dépendent parfois de 4 variables. La compréhension du sujet (et donc une rédaction claire) demande de bien comprendre le rôle de chaque variable.

- Quelle est la variable d'intégration : celle par rapport à qui toutes les fonctions étudiées et toutes les dominatrices doivent être intégrables.
- Quelle est la variable d'étude (celle qui doit disparaître lors des dominations)
- Quelles sont les variables paramètres (qui restent fixées et n'ont pas à intervenir dans le théorème utilisé)

1. La fonction $u \mapsto \dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}$ est continue positive sur $]0,1]$.

   En 0 l'équivalent est donné par le terme de plus bas degré:

   - si $x<1/2$ on a $\dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+x} \sim u^{x-1} = \dfrac{1}{u^{1-x}}$ intégrable sur $]0,1]$ ssi $x>0$
   - si $x>1/2$ on a $\dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+x} \sim u^{-x}$ intégrable sur $]0,1]$ ssi $x<1$
   - si $x=1/2$ on a $\dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+x} \sim 2u^{-(1/2)}$ intégrable sur $]0,1]$

   $$\boxed{f(x) \text{ existe si et seulement si } x \in]0,1[}$$

   On peut aussi séparer en 2 et étudier $A=\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}du$ et $B=\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}du$ et étudier A et B par équivalent ou avec la règle $x^a g(x) \to l$

   - si $x \in]0,1[$ A et B convergent donc $f(x)$ existent
   - si $x<0$ A converge et B diverge donc $A+B$ diverge et $f(x)$ n'est pas définie
   - si $x>1$ on a DV+CV=DV $f(x)$ n'est pas défini.
   - On a de la chance le cas $DV+DV$ n'est pas possible.

   On remarquera que l'hypothèse sur f dit que $\sum a_n t^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, et que sur $[0,1[$ $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

2. Bien distingué les 2 questions : A la première question on veut le domaine de définition (l'intégrale converge ssi ...) , Dans cette question on veut une implication : si ... alors l'intégrale converge.

   Si vous prenez $f=\widetilde{0}$ qui est bien DSE l'intégrale est toujours définie.

   Toute fonction développable en série entière est C^∞ . En particulier f est continue sur $[0,1[$.

   Si $y \in]0,1[$ on a pour tout $v \in]0,1]$, $vy \in [0,1[$ donc $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$ est continue sur $]0,1]$

   f étant continue en 0^+ on a $\begin{array}{l} \left|v^{x-1}f(yv)\right| \sim v^{x-1}\left|f(0)\right| \text{ si } f(0) \neq 0 \\ \left|v^{x-1}f(yv)\right| \ll v^{x-1}\left|f(0)\right| \text{ si } f(0)=0 \end{array}$. Pour $x>0$ $v \mapsto v^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc

   $$\boxed{\int_0^1 v^{x-1}f(yv)dv \text{ converge pour tout } x>0 \text{ et } y \in]0,1[}$$

remarque : On peut aussi anticiper la question 3 et donner toute de suite une domination ou même la question 4 : le théorème d'ntégration termes à termes d'une intégrale impropre a pour conséquence l'intégrabilité de la somme , restera à faire le calcul à la question 4.

2.bis) Si $y=0$ $v^{x-1}f(yv)=v^{x-1}f(0)$ est intégrable sur $]0,1]$ pour $x>0$ et

$$\int_0^1 v^{x-1}dv=\left[\frac{v^x}{x}\right]_0^1=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\forall\ x>0\ ,\ \int_0^1 v^{x-1}f(0)dv=\frac{f(0)}{x}}$$

3. D'après le calcul précédent : $\forall x>0, \forall y\in[0,1[\ S[f](x,y)=\displaystyle\int_0^1 v^{x-1}f(yv)dv.$

   On a un problème de continuité d'une intégrale à paramètre.

   pour tout $x>0$:

   - $\forall v\in]0,1]$, $y\mapsto v^{x-1}f(yv)$ est continue sur $[0,1[$ car f est développable en série entière sur $[0,1[$ et $yv\in[0,1[$
   - $\forall y\in[0,1[\ v\mapsto v^{x-1}f(yv)$ est continue intégrable sur $]0,1]$ d'après l'étude de **Q.2**
   - On a domination sur tout segment $[a,b]\subset[0,1[$: si $y\in[a,b]$, on a $vy\in[0,b]$. Or la fonction f est continue sur le segment $[0,b]$ donc y est borné . On note $M_b=\sup\limits_{[0,b]}(|f|)$. On a alors pour $y\in[a,b]$: $\left|v^{x-1}f(yv)\right|\leq v^{x-1}M_b$, continue , intégrable sur $]0,1]$ (car $x-1>-1$) et indépendante de y.

   $$\boxed{\forall x>0\ ,\ y\mapsto S[f](x,y)\text{ est continue sur }[0,1[}$$

   remarque 1: la continuité est la conséquence du développement en série entière qui suit.

   remarque 2 : On peut aussi se ramener à un problème de primitive en posant pour $y\neq 0$: $V=yv$, $S[f](x,y)=\dfrac{1}{y^x}\displaystyle\int_0^y V^{x-1}f(V)dV$, qui prouve facilement la continuité pour $y\in]0,1[$ et qui prouve la continuité en 0 :

   $$S[f](x,y)=\frac{1}{y^x}\int_0^y V^{x-1}f(V)dV=S[f](x,y)=\frac{1}{y^x}\int_0^y\left(V^{x-1}a_0+o(V^{x-1})\right)dV=\frac{1}{y^x}\left(\frac{y^x}{x}a_0+o(y^x)\right)$$

4. On a $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$ si $t\in[0,1[$, donc $v^{x-1}f(yv)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nv^{n+x-1}y^n$. Si on peut intégrer termes à termes pour $y\in[0,1[$, $S[f](x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+x}y^n$, ce qui montre que $y\mapsto S[f](x,y)$ est développable en série entière.

   Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration termes à termes sur un intervalle qui n'est pas un segment:

   Soit $x>0$ et $y\in[0,1[$ fixés:

   - $\forall v\in]0,1]$ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nv^{n+x-1}y^n$ converge et sa somme $v\mapsto v^{x-1}f(vy)$ est continue sur $]0,1]$
   - $\forall n\in\mathbb{N}$, $v\mapsto a_nv^{n+x-1}y^n$ est continue intégrable sur $]0,1]$ car $n+x-1>1$

- la série $\sum \int_0^1 \left|a_n v^{n+x-1} y^n\right| dv$ converge par majoration du terme général par le terme général d'une série convergente :

$$\int_0^1 \left|a_n v^{n+x-1} y^n\right| dv = \frac{|a_n y^n|}{n+x} \leq \frac{|a_n y^n|}{x}$$

et la série $\sum a_n y^n$ CVA car $y<1$ et $\sum a_n y^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$. (toute série entière converge absolument sur le disque ouvert de convergence)
- On peut intégrer termes à termes.

$$\boxed{\forall x>0,\ \forall y \in [0,1[\ S[f](x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+x} y^n}$$

Autre démonstration : On sépare $n=0$ des autres termes . Pour $n \geq 1$ $v \mapsto a_n v^{n+x-1} y^n$ est maintenant continue sur le segment $[0,1]$ car $n+x-1>0$. Comme on intègre sur un segment on peut introduire la convergence normale de la série $v \longmapsto \sum_1^{+\infty} a_n v^{n+x-1} y^n$ pour intégrer termes à termes.

Remarque : dans cette question "x non entier" ne sert pas encore.

5. Remarque $\widetilde{f}$ prolonge f à D . Mais il ne faut pas penser à la même fonction : sur $[0,1[$, $\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$; Si $z \notin \mathbb{R}$, on ne peut pas parler de $\ln(1+z)$.

   La fonction à intégrer est continue sur le segment $[0,1]$:

$$\int_0^1 \cos\left((n+x)\pi t\right) dt = \left[\frac{\sin\left((n+x)\pi t\right)}{(n+x)\pi}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sin\left((n+x)\pi\right)}{(n+x)\pi} = \frac{(-1)^n \sin(x\pi)}{(n+x)\pi}$$

   On a $x>0$ et $n \geq 0$ le dénominateur est toujours non nul.

   D'où :

$$\boxed{I_n(x) = \frac{1}{n+x}}$$

6. On se fixe $x \in F$ et $y \in [0,1[$.

   On a $\widetilde{f}\left(-ye^{i\pi t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n (-1)^n y^n e^{in\pi t}\right]$. Donc

$$e^{i\pi x t} \widetilde{f}\left(-ye^{i\pi t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n (-1)^n y^n e^{i(n+x)\pi t}\right]$$

   et donc $\mathrm{Re}\left(e^{i\pi x t} \widetilde{f}\left(-ye^{i\pi t}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n(-1)^n y^n \cos\left((n+x)\pi t\right)\right]$. On a donc

$$J[f](x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n(-1)^n y^n \cos\left((n+x)\pi t\right)\right]\right) dt$$

   Si on peut intégrer termes à termes

$$J[f](x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n = S[f](x,y)$$

   On peut reprendre l'idée de la question 4 pour justifier l'intégration termes à termes.

- $\forall t \in [0,1]$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n(-1)^n y^n \cos((n+x)\pi t)]$ converge et sa somme $t \mapsto \mathrm{Re}\left(e^{i\pi x t}\widetilde{f}\left(-ye^{i\pi t}\right)\right)$ est continue sur $[0,1]$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $t \mapsto [a_n(-1)^n y^n \cos((n+x)\pi t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc y est intégrable.
- $\displaystyle\sum \int_0^1 |a_n(-1)^n y^n \cos((n+x)\pi t)|\, dt$ converge car

$$\int_0^1 |a_n(-1)^n y^n \cos((n+x)\pi t)|\, dt \leq \int_0^1 |a_n y^n|\, dt = |a_n y^n|$$

  terme général d'une série qui converge (CVA d'une série entière sur le disque ouvert de convergence)

La convergence normale est ici plus rapide car on est dès le départ sur un segment : $|a_n(-1)^n y^n \cos((n+x)\pi t)| \leq$

$$\boxed{\forall x \in F \ , \forall y \in [0,1[\ J[f](x,y) = S[f](x,y)}$$

7. Comme $]0,1[\subset F$ on peut appliquer la question précédente

$$S[g](x,y) = J[g](x,y)$$

Or $g(u) = \displaystyle\sum_{u=0}^{+\infty} u^n$ donc $\widetilde{g}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. On a donc

$$J[g](x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}}\right) dt$$

Or

$$\frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}} = \frac{e^{i\pi x t}\left(1-ye^{-i\pi t}\right)}{|1-ye^{i\pi t}|^2} = \frac{e^{i\pi x t} - ye^{i\pi(x-1)t}}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1}$$

et donc

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\pi x t}}{1-ye^{i\pi t}}\right) = \frac{\cos(\pi x t) - y\cos(\pi(x-1)t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1}$$

Soit

$$J[g](x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) - y\cos(\pi(x-1)t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1} dt$$

Si on remplace x par $1-x$ on a :

$$J[g](1-x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi - \pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) - y\cos(\pi x t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) - y\cos(\pi x t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1} dt$$

et donc en ajoutant les 2 :

$$\boxed{S[g](x,y + S[g](1-x,y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) + \cos(\pi(1-x))\,t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1} dt}$$

8. D'après le calcul précédent, on a $1 - 2y\cos(t) + y^2 = \left|1 - ye^{i\pi t}\right|^2$. Comme $y \in (0,1[$, $\left|ye^{i\pi t}\right| = y \neq 1$. le dénominateur de P est toujours non nul.

On vérifie

$$\frac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}} = \frac{\left(1+ye^{i\pi t}\right)\left(1-ye^{-i\pi t}\right)}{|1-ye^{i\pi t}|^2} = \frac{1 + y\left(e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}\right) - y^2}{1 - 2y\cos(t) + y^2}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{\frac{1-y^2}{1-2y\cos(t)+y^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}}\right)}$$

9. On utilise l'expression complexe pour faire le développement en série entière. Si $z = ye^{i\pi t}$ on a $|z| < 1$ donc $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

$$\begin{aligned}\left(1+ye^{i\pi t}\right)\cdot\frac{1}{1-ye^{i\pi t}} &= \left(1+ye^{i\pi t}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{i\pi nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{i\pi nt} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+1} e^{i(n+1)\pi t} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{i\pi nt} + \sum_{n=1}^{+\infty} y^n e^{in\pi t} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2y^n e^{in\pi t}\end{aligned}$$

La partie réelle donne :

$$\boxed{P(t,y) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\cos(n\pi t)\right) y^n}$$

Remarque : vue la forme du résultat final on vient de développer en série de Fourier la fonction continue 2 périodique $t \longmapsto P(t,y)$

10. A $y \in [0,1[$ fixé on peut intégrer termes à termes la relation précédente par convergence normale sur le segment

   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \longmapsto \left(2\cos(n\pi t)\right) y^n$ est continue sur le segment $[0,1]$
   - $\sup\limits_{[t\in[0,1]}\left(\left|\left(2\cos(n\pi t)\right) y^n\right|\right) \leq 2y^n$, avec convergence de la série $\sum y^n$ car $y \in [0,1[$

   donc

$$\int_0^1 P(t,y)dt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1$$

   On peut utiliser l'autre théorème d'intégration termes à termes en majorant :

$$\int_0^1 \left|\left(2\cos(n\pi t)\right) y^n\right| dt \leq \int_0^1 2y^n dt = 2y^n$$

$$\boxed{\int_0^1 P(t,y)dt = 1}$$

   Remarque :Si on n'a pas réussi la question 9 le classique changement de variable avec l'angle moitié permet de conclure:On pose $u = \tan(\pi t/2)$, $t = \dfrac{2}{\pi}\arctan(u)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{1-2y\cos(\pi t)+y^2} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+y^2)u^2 - 2y(1-u^2)} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1-y)^2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\left(\frac{1+y}{1-y}u\right)^2+1} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1-y)^2}\left[\frac{1-y}{1+y}\arctan\left(\frac{1+y}{1-y}u\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-y^2} \ \left(\text{ car } \frac{1+y}{1-y} > 0 \right)\end{aligned}$$

11. 1. Si $t \in [0,1]$, on a $\pi t \in [0,\pi]$ donc $t \longmapsto \cos(\pi t)$ décroît et donc $t \longmapsto P(t,y)$ décroît. On a donc

$$0 \leq \int_\alpha^1 P(t,y)dt \leq \int_\alpha^1 P(\alpha,y)dt = (1-\alpha)P(\alpha,y) = (1-\alpha)\frac{1-y^2}{1-2\cos(\pi\alpha)\,y+y^2}$$

   le dénominateur tend vers $2(1-\cos(\pi\alpha))$ non nul car $\alpha \in]0,1]$. Donc

$$\boxed{\lim_{y\longmapsto 1^-}\left(\int_\alpha^1 P(t,y)dt\right) = 0}$$

2. On majore (comme P est positif):

$$\left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)dt\right| \leq \int_0^\alpha P(t,y)\left|\varphi(t)\right| dt \leq \int_0^\alpha P(t,y) \sup_{t\in[0,\alpha]} \left(\left|\varphi(t)\right|\right) dt$$

Mais, toujours avec la positivité de P on a :

$$\int_0^\alpha P(t,y)dt \leq \int_0^1 P(t,y)dt = 1$$

et donc :

$$\boxed{\forall y \in [0,1[\ ,\ \left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)dt\right| \leq \sup_{t\in[0,\alpha]} \left(\left|\varphi(t)\right|\right)}$$

12. "En déduire" : il faut donc utiliser le résultat précédent sans chercher des majorations plus classiques.

1. si $\varphi(0) = 0$, φ est petite au voisinage de 0 , donc $\sup_{t\in[0,\alpha]} \left(\left|\varphi(t)\right|\right)$ est petit (et tend vers 0 si α tend vers 0 donc $\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)dt$ tend vers 0 ainsi que $\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)dt$.
Mais pour la première limite α tend vers 0 et pour la seconde y tend vers 1.
Pour passer de la limite en α à celle en y il suffit de revenir aux quantificateurs :Comme $\varphi(0) = 0$ et comme φ est continue en 0 on a :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \alpha > 0\ ,\ \forall x \in [0,\alpha]\ ,\ \left|\varphi(x)\right| \leq \varepsilon$$

On a donc $\sup_{t\in[0,\alpha]} \left(\left|\varphi(t)\right|\right) \leq \varepsilon$ et donc $\left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)dt\right| \leq \varepsilon$

On prend cet α (qui est bien une constante par rapport à y) et on écrit la limite de $\int_\alpha^1$

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0\ ,\ \forall y \in [1-\eta, 1[, \left|\int_\alpha^1 P(t,y)dt\right| \leq \varepsilon$$

Et réunissant les 2 :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0\ ,\ \forall y \in [1-\eta, 1[, \left|\int_0^1 P(t,y)dt\right| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui montre bien que $\lim_{y\mapsto 1^-} \left(\int_0^1 P(t,y)dt\right) = 0 = \varphi(0)$

2. Si $\varphi\left(0\right) \neq 0$, on introduit $\psi : \forall x \in [0,1]\ ,\ \psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ qui est continue sur $(0,1]$.

$$\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)dt = \left(\int_0^1 P(t,y)dt\right)\varphi(0) + \int_0^1 P(t,y)\psi(t)dt$$

la première intégrale vaut 1 et la seconde tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{y\mapsto 1^-} \left(\int_0^1 P(t,y)dt\right) = \varphi(0)}$$

13. Comme $x \in]0,1[$ et $y \in [0,1[$ on peut utiliser la formule de la question 7 et la définition de P :

On a $C[g](x,y) = \dfrac{\pi(1-y)}{\sin(\pi y)} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\cos(\pi x t) + \cos(\pi(1-x))\, t)}{y^2 - 2y\cos(\pi t) + 1} dt$ et $A(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-y^2}{y^2 - 2y\cos(\pi t)+1} \cos(\pi x t)\, dt$

donc $A(1-x,y) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-y^2}{y^2-2y\cos(\pi t)+1}\cos(\pi(1-x)t)\, dt$

Une comparaison des 2 expressions donne :

$$\boxed{C[g](x,y) = \frac{\pi}{(1+y)\sin(\pi x)}\left(A(x,y) + A(1-x,y)\right)}$$

14. Si y tend vers 1^-, $A(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-y^2}{y^2-2y\cos(\pi t)+1}\cos(\pi x t)\, dt$ tend vers 1 , en appliquant la question 12 à $\varphi(t) = \cos(\pi x t)$ qui est bien continue sur $[0,1]$

$$\boxed{\lim_{y \longmapsto 1^-} (C[g](x,y)) = \frac{2\pi}{2.\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

15. On a d'après les définitions des fonctions dans le sujet pour $x \in]0,1[$ et $y \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 \frac{(u^{x-1} + u^{-x})}{1+u} du \qquad , \qquad S[g](x,y) = \int_0^1 v^{x-1}\frac{1}{1+vy} dv \\ C[g](x,y) &= S[g](x,y) + S[g](1-x,y) = \int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy} dv \end{aligned}$$

La question précédente nous donne $\displaystyle\lim_{y \longrightarrow 1^-}\left(\int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Si on peut dire :

$$\int_0^1 \lim_{y\longrightarrow 1^-}\left(\frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}\right) dv = \lim_{y \longrightarrow 1^-}\left(\int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv\right)$$

on aura prouver $I(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Il suffit de prouver la continuité de $y \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv$ en 1.

Etude sur $[0,1]$ (ou tout segment $[\alpha,1]$)

- $\forall v \in]0,1]$, $y \longmapsto \dfrac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}$ est continue sur $[0,1]$
- $\forall y \in [0,1]$ $v \longmapsto \dfrac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}$ est continue sur $]0,1]$, intégrable d'après la domination qui suit
- $\forall y \in [0,1], \forall v \in]0,1[$, $\left|\dfrac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}\right| \leq v^{x-1} + v^{-x}$, fonction indépendante de y et intégrable sur $]0,1[$ d'après les équivalents de la première question.

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\ , \int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+v}dv = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

Remarque (hors devoir) : le changement de variable $u = 1/v$ donne

$$\int_0^1 \frac{v^{x-1}}{1+v}dv = \int_{+\infty}^0 \frac{u^{1-x}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{-x}}{1+u}du$$

Du calcul précédent on déduit donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{-x}}{1+u}du = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$