INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.
On définit la suite des sommes partielles par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Les parties 1, 2 et 3 suivantes seront consacrées à la détermination de sa somme S par divers moyens. Elles sont donc indépendantes.

La partie 4 utilisera la valeur de S obtenue pour calculer la somme d'une série double.

On rappelle que:

- pour tous entiers m et n vérifiant $m \leq n$ on note $[[m,n]]$ l'intervalle d'entiers:

$$[[m,n]] = \{p \in \mathbb{Z}, m \leq p \leq n\}$$

- pour tous entiers m et n vérifiant $m \leq n$ on note $\binom{n}{m}$ le coefficient binomial $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

PRELIMINAIRE

1. Justifier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On note donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

2. Calculer en fonction de S la somme des deux séries :

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \ , \ W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

PREMIERE PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

   Rappeler la formule permettant de calculer la somme σ_1 des racines de P , comptées avec leur multiplicité, en fonction de ses coefficients a_n et a_{n-1} .

2. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ . .Démontrer l'égalité :

$$\sin\left((2p+1)\,\varphi\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\cos\left(\varphi\right)\right)^{2p-2k} \left(\sin\left(\varphi\right)\right)^{2k+1}$$

   b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \neq 0[\pi]$, on a :

$$\sin\left((2p+1)\,\varphi\right) = \left(\sin\left(\varphi\right)\right)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\text{cotan}\left(\varphi\right)\right)^{2p-2k}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et P le polynôme défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in [[1,p]]$,on pose $\gamma_k = \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ .Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in [[1,p]]$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in [[1,p]]$, le réel $\frac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \pi/2[$. En déduire que le polynôme P possède p racines simples, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=1}^{p} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3} \ , \ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. a) Démontrer, pour tout réel $\varphi \in]0, \pi/2[$, les encadrements :

$$0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$$

b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$ on a l'encadrement :

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} s_p < \frac{2p(p+1)}{3}$$

c) Calculer S .

DEUXIEME PARTIE :Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^{2n} \, dt \ , \ J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos(t))^{2n} \, dt \ , \ K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calculer les intégrales I_0 et I_1.

2. a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

3. Soit $n \geq 1$.

a) Démontrer la relation

$$I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

b) En déduire que

$$K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$$

c)En déduire que

$$\frac{\pi}{4} s_n = J_0 - K_n$$

4. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$, on a :

$$x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

b)En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_{n+1}}{4(2n+1)} \text{ , } 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

c) Retrouver la valeur de S.

TROISIEME PARTIE : Noyau de Dirichlet

Pour tout entier $n \geq 1$ on note D_n le noyau de Dirichlet,défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } D_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \neq 0[2\pi]$, on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note L_n l'intégrale :

$$L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx$$

a)Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi x \cos(kx) dx$ pour tout entier $k \geq 1$

b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - (-1)^k}{k^2}$$

c) En déduire que la suite (L_n) converge et exprimer sa limite en fonction du réel V défini dans le préliminaire.

3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0, \pi]$ par :

$$x \longrightarrow \frac{x}{\sin(x/2)}$$

(3/2) Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$

(5/2) En étudiant $\dfrac{1}{f}$ montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0, \pi]$

4. Soit $\phi \in C^1([0, \pi], \mathbb{R})$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right) = 0$$

5. a) Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}(L_n)=0$$
b) Retrouver la valeur de S.

QUATRIEME PARTIE : Une somme double

L'objet de cette partie est de calculer la limite de la somme double
$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$
On pose pour tout entier $N\geq 1$:
$$H_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

1. a) Démontrer que pour tout entier $N\geq 1$ on a:
$$\ln(1+N)\leq H_N\leq 1+\ln(N)$$
indication : n'oubliez pas que $\ln(x)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$

b) En déduire la limite en $+\infty$ de $\dfrac{H_N}{N}$

c) Démontrer que pour tout entier $M\geq 1$ on a :
$$\sum_{m=1}^{M}\frac{H_m}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}$$
indication : décomposer $\dfrac{1}{m(m+1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m+1}$, (a,b) à calculer.

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. Pour tous entier $N\geq 1$ et pour tout entier $m\geq 2$,on pose
$$Z_{N,m}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}$$
a) Démontrer que pour tout entier $m\geq 2$
$$Z_{N,m}=\frac{1}{m-1}\left(H_{m-1}-\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$$
indication : décomposer $\dfrac{1}{n(n+m-1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+m-1}$, (a,b) à calculer.

b) En déduire que
$$\lim_{N\to+\infty}(Z_{N,m})=\frac{H_{m-1}}{m-1}$$

3. a) Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, et pour tout entier $M \geq 2$ on a:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = s_N + \sum_{m=2}^{M} \frac{Z_{N,m}}{m}$$

b) En déduite

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} \right)$$

puis :

$$\lim_{M \to +\infty} \left(\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} \right) \right)$$