AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$;

- si $x > 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge.
- si $x \leq 0$, la suite ne tend pas vers 0, donc la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement.

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

2.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$, qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, si la suite $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée sur $[a,b]$ par une fonction ϕ continue par morceaux sur $[a,b]$(ie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq \phi(x)$) alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f$

2. On prend $a = 0, b = 1, f_n : t \to \dfrac{t^{n+1}}{1+t}$.
   - Les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0,1]$
   - la suite (f_n) converge simplement vers $f : t \to \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ 1/2 \text{ si } t = 1 \end{cases}$
   - f est continue par morceaux sur $[0,1]$
   - la suite est dominée par $\phi : t-> \dfrac{1}{1+t}$ continue sur $[0,1]$

   donc la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f = 0$, car f est nulle sauf en un nombre fini de points.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right) = 0}$$

3. D'une part comme la somme a un nombre fini de termes

$$\int_0^1 g_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

D'autre part comme $g_n(x)$ est la somme partielle d'une série géométrique de raison $-t \neq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(t)dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-t)^k dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)}dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

et donc en passant à la limite avec I.2.2. :

$$\boxed{F(1) = \ln 2.}$$

3. $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 2$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est indépendante de x et convergente,

la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

---

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ 1 \text{ si } n = 1 \end{cases}$, le théorème de passage à la limite termes à termes permet d'affirmer que comme:

- chaque fonction $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ admet une limite finie en $+\infty$
- la série converge normalement sur un intervalle $[a, +\infty[$

alors

- la série $\sum \lim \left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ *converge*(trivialité ici)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (F(x)) = 1}$$

4. *continuité de F*

théorème de continuité : Si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur un intervalle I , converge normalement sur tout segment inclus dans I , alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

   1. $I =]1, +\infty[$

      - les fonctions $x \to \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ sont continues sur I
      - sur $[a, b] \subset I$ on a $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [a, b]$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \dfrac{1}{n^a}$. Comme $a > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^a}$ est indépendante de x et convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[a, b]$

      donc

$$\boxed{F \in C^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})}$$

      Sur $]0, 1]$ *la série* $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *ne converge pas absolument , elle ne converge donc pas non plus normalement.. D'où le chemin détourné qui suit*

   2. On a en utilisant $(1 + u)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha u$

$$h_p(x) = \frac{1}{(2p)^x}\left(1 - \frac{1}{(1 + 1/(2p))^x}\right) \sim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^x}\frac{1}{p^x}\frac{x}{2p} = \frac{x}{2^{x+1}}\frac{1}{p^{1+x}} > 0$$

      Par le théorème sur les séries équivalente à termes positifs comme $1 + x > 1$, la série $\sum h_p(x)$ converge.
      On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{N} h_p(x) &= \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^x} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p+1)^x} \\ &= \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2N} \frac{1}{(k)^x} - \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ impair}}}^{2N+1} \frac{1}{(k)^x} = \sum_{k=2}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k^x} \end{aligned}$$

      et donc en passant à la limite (les deux séries convergent pour $x > 0$) et en ajoutant le terme pour $k = 1$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} h_p(x) = 1 - F(x)}$$

remarque : attention à la rédaction $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^x}$ diverge

3. simple vérification :

$$h_p(x)=\frac{(2p+1)^x-(2p)^x}{(2p)^x}.\frac{1}{(2p+1)^x}=\frac{(1+\frac{1}{2p})^x-1}{(2p+1)^x}$$

4. les fonctions h_p étant continues sur $\mathbb{R}^*$, le seul problème est la convergence normale sur tout segment. Comme par hasard la question précédente donne la bonne transformation : comme $h_p(x)$ est positive

$$\forall p\geq 1,\forall x\in[a,b]\ ,\ |h_p(x)|=h_p(x)\leq\frac{(1+\frac{1}{2p})^b-1}{(2p+1)^a}\sim_{p\to+\infty}\frac{b}{2^{1+a}}\frac{1}{p^{1+a}}$$

Comme $1+a>1$ on a par équivalence des termes généraux (positifs) la convergence de $\displaystyle\sum\frac{(1+\frac{1}{2p})^b-1}{(2p+1)^a}$ indépendante de x et donc la convergence normale de $\sum h_p$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

La somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}h_p$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc aussi $F=1-\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}h_p$

5. *Dérivabilité de F*

1. étude sur $]1,+\infty[$. Le théorème de dérivation termes à termes dit que :
si
   - $\sum f_n$ est une série de fonctions C^1 sur un intervalle I
   - $\sum f_n$ converge simplement sur I
   - $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans I

   alors
   - $\displaystyle\sum_0^{+\infty}f_n$ est C^1 sur I , et la dérivée se calcule par dérivation termes à termes.

   ici : la première hypothèse est évidente et la seconde a déjà été vérifiée.
   reste à étudier la convergence normale de $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^x}$ sur $[a,b]\subset]1,+\infty[$:

$$\forall n\geq 2,\forall x\in[a,b]\ ,\ \left|\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^x}\right|\leq\frac{\ln(n)}{n^a}$$

   On a une série de Bertrand : étude classique on prend $\alpha\in]1,a[$ (par exemple $\alpha=\dfrac{1+a}{2}$)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\frac{\ln(n)}{n^a}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^{a-\alpha}}\right)=0\text{ car }a-\alpha>0$$

   donc $0\leq\dfrac{\ln(n)}{n^a}<<\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha>1$. On a donc la convergence de la série $\displaystyle\sum\frac{\ln(n)}{n^a}$, et donc la convergence normale de $\sum f_n'$ sur $[a,b]$

$$\boxed{F\text{ est }C^1\text{ sur }]1,+\infty[\text{ et }\forall x\in]1,+\infty[\ ,\ F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^x}}$$

2. Résultat admis utilisant des méthodes hors programme en PC

$$\forall x>0,\ F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}.$$

6. *Lien avec ζ*

ξ est définie sur $]1,+\infty[$ comme série de Riemann.

1. Pour $x > 1$,

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$$

. On en déduit l'égalité :

$$\boxed{\forall x \geq 1 : F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)}$$

2. On a donc $\xi(x) = \dfrac{F(x)}{(1 - 2^{1-x})}$

- $\lim\limits_{+\infty} \left(2^{1-x}\right) = 0$ donc $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ donc $\boxed{\zeta(x) \longrightarrow_{x \to +\infty} 1}$.
- $\lim\limits_{1} (F(x)) = \ln(2)$ par continuité. $\lim\limits_{1}(1 - 2^{1-x}) = 0$ donc $\boxed{\zeta(x) \longrightarrow_{x \to 1} +\infty}$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

Rappel sur le théorème du cours :

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries **absolument** convergentes alors si on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. la série $\sum c_n$ converge et $\left(\sum\limits_0^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_0^{+\infty} b_n\right) = \sum\limits_0^{+\infty} c_n$

Comme ici les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour $n \geq 1$, on rajoute $a_0 = b_0 = 0$ et on a donc bien l'expression du sujet.

Le "gros" problème ici , c'est que la convergence absolue est fausse pour $x \leq 1$

1. *Étude d'un cas convergence*

   Lorsque $x > 1$, la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc le théorème s'applique et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2$.

$$\boxed{\text{pour } x > 1 \text{ , } \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = (F(x))^2}$$

2. *Etude d'un cas de divergence*

   1. Si $\psi(t) = t(n-t)$. On a une fonction C^1 sur $[0, n]$ de dérivée $n - 2t$. la fonction est maximum en $\dfrac{n}{2}$ ou elle vaut $\dfrac{n^2}{4}$

   2. Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{[k(n-k)]^x}$. La somme comporte $n-1$ termes tous plus grand que $\dfrac{1}{(n^2/4)^x}$

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1)\frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}.$$

   3. Pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(n-1)4^x}{n^{2x}} \sim_{n \to +\infty} 4^x n^{1-2x}$ ne tend pas vers 0. Donc $\underline{\text{la série } \sum\limits_{n \geq 2} c_n(x) \text{ diverge grossièrement.}}$

3. *Etude du cas où $x = 1$*

   1. $\dfrac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{1}{n-\mathrm{X}}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) \\ &= (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{K=1}^{n-1}\frac{1}{K}\right) = 2(-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2}\frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

2. pour $n \geq 2$

$$\frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} = \frac{(n+1)H_{n-1} - nH_n}{n(n+1)} = \frac{n(H_{n-1} - H_n) + H_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{-1 + H_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}{n(n+1)} \geq 0$$

Donc la suite $\underline{\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2} \text{ est décroissante}}$.

3. Pour $n \geq 2$: sur $[k-1, k]$, $t -> 1/t$ est décroissante donc $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$. Et donc $H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$

4. Donc pour $n \geq 1$, $0 \leq \frac{H_n}{n} \leq \frac{1+\ln(n)}{n}$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)$ converge vers 0 en décroissant

   La série $\sum_{n\geq 2} c_n(1)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées

$$\boxed{\sum c_n(1) \text{ converge.}}$$

On a prouvé la convergence mais pas que $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(1) = F(1)^2 = (\ln(2))^2$

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

1. *Développement asymptotique en 1*

   1. On pose $h = x - 1$.
      - Comme F est dérivable en 1, Taylor Young donne le développement limité :

      $$F(1+h) =_{h=0} F(1) + hF'(1) + o(h) =_{h=0} \ln 2 + hF'(1) + o(h).$$

      - On a aussi : $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-h\ln 2} = h\ln 2 - \frac{(\ln\ 2)^2}{2}h^2 + o(h^2)$ au voisinage de $h = 0$.

   2. *Développement de* ζ
      au voisinage de $h = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\zeta(1+h) &= \frac{F(1+h)}{1-2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h\ln 2 - \frac{(\ln\ 2)^2}{2}h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h\ln 2}\frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2}h + o(h)} \\
&= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + hF'(1) + o(h)\right)\left(1 + \frac{\ln 2}{2}h + o(h)\right) \\
&= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + h\left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2}\right) + o(h)\right) \\
&= \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\zeta(x) =_{x=1} \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)}$$

2. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   1. Pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$, donc $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$ et en intégrant sur $[n, n+1]$: $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$. On en déduit que :

$$\boxed{0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}}$$

.

2. La série $\sum\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)$ est du type $\sum(u_{n+1}-u_n)$ en posant $u_n=\frac{-1}{n^x}$. Comme la suite (u_n) converge (vers 0) la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

   Le terme général de la série $\sum v_n$ est donc positif , majoré par le terme général d'une série convergente.

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge simplement sur } [0,1]}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} v_n(1) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\end{aligned}$$

   le second terme tend vers 0 donc :

$$\boxed{\lim_{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\sum_{k=1}^{n}v_n(1)}$$

4.

$$\begin{aligned}\forall x &\in\ ]1,2], \sum_{k=1}^{n}v_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\frac{(n+1)^{1-x}-1}{1-x}\longrightarrow_{n\to+\infty}=\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]1,2], \sum_{k=1}^{+\infty}v_k(x)=\zeta(x)-\frac{1}{x-1}}$$

   Les 5/2 peuvent passer par l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}$

5. $\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}$ à la même forme que $h_p(x)=\frac{1}{(2p)^x}-\frac{1}{(2p+1)^x}$. La même transformation permet de conclure :

$$|v_n(x)|\le\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}=\frac{(1+\frac{1}{n})^x-1}{(n+1)^x}\le\frac{(1+\frac{1}{n})^2-1}{(n+1)^1}\sim\frac{2}{n^2}$$

   ce qui assure la convergence normale de $\sum v_n$ sur $[1,2]$

6. On a prouvé la convergence normale de la série $\sum v_n$ sur $[1,2]$. Il reste à prouver la continuité des v_n pour appliquer le théorème de continuité de la somme d'une série .

   Or en calculant l'intégrale

$$v_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n^x}-\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}}-\frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)\text{ pour } x\in]1,2]\\ \frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln n \text{ pour } x=1\end{cases}$$

   .

   - v_n est continue sur $]1,2]$
   - Etude en 1^+ :, $\frac{1}{n^x}\to_{x\to1}\frac{1}{n}$ et si on pose $h=x-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}}-\frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) &= \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-h\ln n}-\mathrm{e}^{-h\ln(n+1)}\right)=\frac{1}{h}\mathrm{e}^{-h\ln(n+1)}\left(\mathrm{e}^{-h\ln n+h\ln(n+1)}-1\right)\\ &\sim \frac{1}{h}.1.\left(-h\ln n+h\ln(n+1)\right)\ \text{car}\ -h\ln n+h\ln(n+1)->0\end{aligned}$$

   donc $v_n(x)=\frac{1}{n}+\ln(n+1)-\ln n+o(1)$. Donc v_n est continue en 1.

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$. La convergence normale sur $[1,2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,2]$.
Remarque : les 5/2 peuvent étudier la continuité avec le théorème sur les intégrales à paramètre.

7. On en déduit que $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+. D'où

$$\boxed{\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1) \text{ au voisinage de } 1^+}$$

.

3. *Application*

de III1 et III2 on déduit
$$\zeta(x) =_{x=1} \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$
On multiplie par $(x-1)$ pour avoir deux développement limités de $(x-1)\zeta(x)$.Par unicité du développement limité en 1^+ on déduit l'égalité $\dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2} = \gamma$.

D'où $F'(1) = (\ln 2)\left(\gamma - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

D'après I.5.2, $F'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = \ln 2\left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma\right)}$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

4. $B_1' = B_0 = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + k$. La condition $\int_0^1 (t+k)\,dt = 0$ donne $\dfrac{1}{2} + k = 0$ soit $k = -\dfrac{1}{2}$ et $\boxed{B_1 = X - \dfrac{1}{2}}$.

On vérifie que B_1 est bien solution.

$B_2' = 2B_1 = 2X - 1$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = X^2 - X + k$. De plus $\int_0^1 (t^2 - t + k)\,dt = 0$ donc $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \ell = 0$ donc $\ell = \dfrac{1}{6}$ et $\boxed{B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}}$.

On vérifie que B_2 est bien solution.

5.

- Pour $n = 0$ $B_0(1) - B_0(0) = 0$
- Pour $n = 1$ $B_1(1) - B_1(0) = 1$
- Pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0$ (car $n-1 \in \mathbb{N}^*$).

6. *Symétrie par récurrence:*

- si $n = 0$ on a $1 = (-1)^0 1$
- si $n = 1$ on a $\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = (-1)^1\left(1 - X - \dfrac{1}{2}\right)$
- supposons $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. alors $(-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X)$ vérifie les 2 conditions de la suite de Bernoulli , donc par l'unicité admise $(-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X) = B_{n+1}(X)$:
  – $\left[(-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X)\right]' = (-1)^{n+2} B_{n+1}'(1-X) = (-1)^{n+2} B_n(1-X) = B_n(X)$

$$-\int_0^1 (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-t)dt = \int_0^1 (-1)^{n+1} B_{n+1}(u)du = 0 \text{ en posant } u = 1-t$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X) = B_n(X)}$$

7. *Développement en série de Fourier .*

   Soit k un entier naturel.

   - g_k est développable en série de Fourier:
     - La restriction de g_k à $[0, 2\pi[$ est C^∞.
     - g_k est continue en 0 :
       * Comme B_{2k} est continue en 0 , $g_k(0^+) = g_k(0)$
       * Comme B_{2k} est continue en 1 $g_k(0^-) = g_k(2\pi^-) = B_{2k}(1^-) = B_{2k}(1)$
       * Or pour $n = 0$ et $n \geq 2$ on a :$B_n(0) = B_n(1)$ donc $g_k(0^+) = g_k(0) = g_k(0^-)$.
     - Donc g_k est C^∞_{pm} sur $\mathbb{R}$:

       Aprèsla vérification précédente, on a $g_k(x) = B_{2k}(\dfrac{x}{2\pi})$ sur le segment $[0, 2\pi]$, on a donc une fonction C^∞ sur $[0, 2\pi]$, 2π périodique.
   - D'après le théorème de convergence normale, la série de Fourier de g_k converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est g_k.
   - La série de Fourier est du type voulu.

     Il suffit de montrer que les coefficients $b_n(g_k)$ sont nuls , donc que g_k est paire .

     Or :$\forall x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} g_k(-x) &= g_k(2\pi - x) \\ &= B_{2k}\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) \text{ car } 2\pi - x \in [0, 2\pi] \\ &= B_{2k}\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \\ &= B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ (question 3)} \\ &= g_k(x) \text{ car } x \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

8. *Expression des coefficients*

   1. *Relation de récurrence*

$$\begin{aligned} a_n(k) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\ \left[B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B'_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\ dx \text{ (intégration par partie)} \\ &= -\frac{k}{n\pi^2}\int_0^{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\sin(nx)\ dx \text{ (période } 2\pi \text{ et récurrence définissant } B_n \text{)} \\ &= -\frac{k}{n\pi^2}\left[B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{k}{n\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{B'_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\ dx \text{ (i.p.p.)} \\ &= \frac{k}{n^2\pi^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{k(2k-1)}{2n^2\pi^3}\int_0^{2\pi} B_{2k-2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)\ dx \\ &= \frac{k}{n^2\pi^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}.a_n(k-1) \end{aligned}$$

   on a vérifié :

$$\boxed{a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}a_n(k-1)}$$

   2. $a_n(0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\ dx = 0$ car $n \geq 1$.

d'après la relation précédente $a_n(1) = \dfrac{1}{(n\pi)^2}\left(B_1(1) - B_1(0)\right) - \dfrac{2}{(2n\pi)^2}.\pi a_n(0) = \dfrac{1}{(n\pi)^2}$.

$$\boxed{\forall n \geq 1 : \ a_n(0) = 0 \ , \ a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}}$$

3. Pour $k \geq 2$, $2k-1 \geq 2$ et donc $B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) = 0$. La formule précédente devient devient

$$a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1)$$

. Donc

$$\begin{array}{rcl} a_n(k) & = & \left(-\dfrac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}\right) . \left(-\dfrac{(2k-2)(2k-3)}{(2n\pi)^2}\right) \cdots\cdots \left(-\dfrac{(4)(3)}{(2n\pi)^2}\right) a_n(1) = \\ (-1)^{k-1} \dfrac{\frac{(2k)!}{2}}{(2n\pi)^{2(k-1)}} . \dfrac{1}{(n\pi)^2} & = & (-1)^{k-1} \dfrac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}. \end{array}$$

$$\boxed{a_n(k) = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}}$$

9. *Conclusion*

- Reste à calculer $a_0(k)$ pour $k \geq 1$: $a_0(k) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_k(x)\ dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\ dx = 2\int_0^1 B_{2k}(t)\ dt = 0$
- En appliquant l'égalité de la question 4. pour $x = 0$, on obtient

$$b_{2k} = g_k(0) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \zeta(2k)$$

Finalement

$$\boxed{b_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \zeta(2k)}$$

.

- si $k = 1$ on connaît $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$ et donc

$$\frac{1}{6} = (-1)^0 \ \frac{2!}{2^1\pi^2} \xi(2)$$

$$\boxed{\xi(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

10. *Calcul effectif des* b_n

1. Par récurrence, on vérifie que B_n est de degré n et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_n^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)B_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$.

   D'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k. = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! B_{n-k}(0)}{(n-k)!k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

.

2. Pour $n \geq 2$, $b_n = B_n(0) = B_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.

   On en déduit : $b_{n-1} = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = -\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$.

   Finalement, pour tout

$$\boxed{\forall n \geq 1 : b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k}$$

3. .On a déjà : $b_0=1, b_1=-1/2$ et $b_2=1/6$ (ce qui permet de vérifier la formule précédente):

$$\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}\left(1-\binom{3}{1}\frac{1}{2}\right)$$

On a ensuite :

$$b_3=-\frac{1}{4}\left(b_0+4b_1+6b_2\right)=-\frac{1}{4}\left(1-2+1\right)=0$$
$$b_4=-\frac{1}{5}\left(b_0+5b_1+10b_2+10b_3\right)=-\frac{1}{30}$$

la question 6 donne $b_{2k}=(-1)^{k-1}\dfrac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\zeta(2k)$ donc ici :

$$\frac{1}{30}=\frac{4!}{2^3\pi^4}\xi(4)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

Programme Maple de calcul du coefficient b_n :

```
bernoulli:=proc(n)
option remember ;
if n=0 then 1
else -1/(n+1)*add(binomial(n+1,k)*bernoulli(k),k=0..n-1)
fi
end;
```

L'option "`remember`" oblige Maple à mémoriser les résultats intermédiaires. Lors de chaque appel récursif à "`*bernouilli(k)`" la valeur déja calculée est restée en mémoire et n'est pas recalculée.