D'APRES CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
MP 2008 Math 1
AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie **III.** qui utilise des résultats de la partie **I.**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

2.

   1. Enoncer le théorème de convergence dominé pour une suite d'intégrales.
   2. Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right)=0$$
   3. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par
   $$g_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-t)^k.$$
   En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$, montrer que $F(1)=\ln(2)$

3. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. *continuité de F*

1. Montrer que F est continue sur $]1, +\infty[$
   On pose
$$h_p(x) = \frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p+1)^x}$$
2. Montrer que la série h_p converge simplement sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\sum_{p=1}^{+\infty} h_p(x)$ en fonction de $F(x)$
3. Montrer que pour $p \geq 1$ et $x > 0$
$$h_p(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2p}\right)^x - 1}{(2p+1)^x}$$
4. Montrer que $\sum_{p=1}^{+\infty} h_p(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.En déduire la continuité de F sur $\mathbb{R}^{+*}$

5. *Dérivabilité de F*

   1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et que
$$\forall x > 1 \ , F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$$
   2. On admet que le résultat reste vrai sur $]0, +\infty[$

6. *Lien avec ζ*

   1. Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :
$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$
   2. En déduire la limite de ζ en $+\infty$ et en 1 .

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.
Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

1. *Étude d'un cas de convergence*

   Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

2. *Étude d'un cas de divergence*

   1. Déterminer le maximum de $t \to t(n-t)$ sur $[0, n]$
   2. Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
   3. En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} c_n(x)$.

3. *Etude du cas $x = 1$*

   On suppose, dans cette question , que $x = 1$.

   1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})}$.

      En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).
   2. Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.
   3. En comparant à une intégrale , donner une majoration simple de H_n.
   4. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

1. *Développement asymptotique en 1*

   1. Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.
   2. En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

2. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

   1. Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

   2. Justifier que, pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$

3. Montrer que $\gamma = \lim\limits_{n->+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ (la constante d'Euler)

4. Exprimer, pour $x \in]1, 2]$, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1 - x$.

5. Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} v_n$ converge normalement sur $[1, 2]$.

6. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ est continue sur $[1, 2]$

7. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

3. *Application*

   Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ avec un entier $k \geq 1$. Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernoulli.
$\mathbb{R}[X]$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.
On identifie un polynôme et sa fonction polynômiale associée.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n' = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)\, dt = 0.$$

On admet qu'il existe **une et une seule** suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n). On l'appelle **la** suite de polynômes de Bernoulli.
On pose $b_n = B_n(0)$, b_n est appelé le n-ième nombre de Bernoulli.

1. Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(1) - B_n(0)$.

3. *Symétrie*

   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

4. *Développement en série de Fourier*

   Soit k un entier naturel. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour } x \in [0, 2\pi[\text{ et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

   Justifier avec soin qu'il existe une suite de réels $(a_n(k))_{n \geq 0}$ telle que, pour tout réel x, on ait :

$$g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) \cos(nx).$$

5. *Expression des coefficients*

   1. Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Montrer que l'on a :

   $$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).$$

   2. En déduire la valeur de $a_n(0)$ et $a_n(1)$ pour $n \geq 1$.
   3. Conclure que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 2$, on a :

   $$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

   On remarquera pour la suite (sans le démontrer) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

6. *Conclusion*

   Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}.

   En déduire $\xi(2)$

7. *Calcul effectif des b_n*

   1. Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$B_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \mathrm{X}^k.$$

   2. En déduire une relation de récurrence permettant de calculer les nombres de Bernoulli sans avoir à déterminer les polynômes de Bernoulli associés.
   3. calculer $\xi(4)$
   4. Écrire, dans un des langages au programme, un petit algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_n pour un entier n donné.

Fin de l'énoncé