D'après Centrale 2005 - Math 1 PC

PARTIE I

1.

1. Récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:
   - si $k = 1$ la propriété est évidente
   - si kp est une période alors pour $n \geq n_p$:

   $$u_{n+(k+1)p} = u_{(n+kp)+p} = u_{n+kp} = u_n$$

   donc $(k+1)\,p$ est aussi une période :

   $$\boxed{(p \in \mathcal{P}(a), k \in \mathbb{N}^*) \Longrightarrow kp \in \mathcal{P}(a)}$$

2. Si p est un période : il existe n_p tel que $n \geq n_p \Longrightarrow u_{n+p} = u_n$
   Si q est un période : il existe n_q tel que $n \geq n_q \Longrightarrow u_{n+q} = u_n$
   Danger : il n'y a aucune raison d'avoir $n_p = n_q$
   On pose $N = \max(n_p, n_q)$ on a alors comme $n + p \geq n \geq n_p$ et $n \geq n_q$

   $$n \geq N \Longrightarrow u_{n+(p+q)} = u_{(n+p)+q} = u_{n+q} = u_n \text{ et } p + q > 0$$

   de même si $n \geq N$ comme $n + p - q \geq N + 0 \geq n_q$ et $n \geq n_p$

   $$p - q > 0 \text{ et } u_{n+(p-q)} = u_{(n+p-q)} = u_{(n+p-q)+q} = u_{n+p} = u_n$$

   remarque : attention à bien choisir des indices suffisamment grand pour toujours dépasser n_p et n_q malgré le signe "moins" . Par exemple on peut aussi écrire $u_{n-q} = u_n$ mais il faut alors $n - q \geq n_q$ donc $n \geq n_q + q$

   $$\boxed{\text{si } p, q \text{ sont périodes avec } p > q \text{ alors } p + q \text{ et } p - q \text{ sont périodes.}}$$

3. $\mathcal{P}(a)$ est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément T . Ce qui impose $T > 0$
4. Comme $p \in \mathcal{P}(a)$ et $T = \inf(\mathcal{P}(a))$, on a $p \geq T$ donc $q \geq 1$.
   d'après les questions précédentes comme T est période et $q \in \mathbb{N}^*$, qT est période , puis comme p et qT sont périodes $p - qT$ est une période si $p > qT$.
   donc si $r \neq 0$, $r = p - qT$ est une période strictement positive donc $r \in \mathcal{P}(a)$ et donc $r \geq T$. Ce qui contredit la définition du reste d'une division euclidienne.**absurde** donc $r = 0$
5. On vient de prouver $p \in \mathcal{P}(a) \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^*$, $p = qT$. La réciproque est évidente d'après **Q.1.1**

   $$\boxed{\mathcal{P}(a) = \{kT, k \in \mathbb{N}^*\}}$$

6. si $T = 1$ la suite est stationnaire.
7. L'ensemble des N tels que pour tout $n \geq N, u_{n+T} = u_n$ est un sous ensemble non vide (T est période) de $\mathbb{N}$ donc il admet un plus petit élément que le sujet note n_0.

2. critère de sous espace vectoriel :

- La suite nulle appartient à QP avec $T = 1, n_0 = 0, a_{n_0} = 0$
- Soient deux réels λ et μ et deux suites ultimement périodiques $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient T_a et T_b leur période respective , n_a et n_b le rang à partir du quel elles sont périodiques
  D'après la première question T_aT_b est une période commune aux deux suites (produit d'une période par un entier ≥ 1)
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \max(n_a, n_b)$, on a $\lambda a_{n+T_aT_b} + \mu b_{n+T_aT_b} = \lambda a_n + \mu b_n$, ainsi $\lambda a + \mu b$ est ultimement périodique.

$$\boxed{QP \text{ est donc un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

Soit A^k la suite définie par $A^k = (0,\cdots,0,1,0\cdots,0,\cdots)$: tous les termes de A^k sont nuls sauf le k-ème qui vaut 1. Chaque suite A^k est stationnaire donc ultimement périodique ($T=1, n_0=k+1$) ..

Supposons QP de dimension d . On peut regarder la famille des $(A_k)_{k=0}^{d}$ c'est une famille libre de cardinal $d+1$. **absurde**

la famille est libre car $\sum_{k=0}^{d} \lambda_i A^i = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_d, 0, \cdots, 0, \cdots)$. donc la combinaison linéaire est nulle si et seulement si tous les coefficients sont nuls.

$$\boxed{QP \text{ n'est pas de dimension finie}}$$

Remarque 5/2: On peut aussi conclure en montrant que les $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de cardinal infinie.

PARTIE II

1. **Exemple 1**

Le calcul des premiers termes donnent

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ F_7=13,\ F_8=21,\ F_9=3$$

On montre aisément, par récurrence sur $k\geq 0$, que $a_{3k}=0$ $a_{3k+1}= a_{3k+2}=1$:

- si $k=0$ F_0 est pair donc $a_0=0$ ... $a_1=a_2=1$
- si la propriété est vraie au rang k :
  - F_{3k+1} et F_{3k+2} sont impairs donc F_{3k+3} est pair ...F_{3k+4}est impair, F_{3k+5} est impair

La suite est donc périodique de période 3 , donc elle est ultimement périodique.

<u>étude de la série:</u>a_n vaut 0 ou 1 donc $0\leq a_n\leq 1$ et donc $|a_nx^n|\leq |x|^n$. On a donc majoré le terme général de la série $\sum a_nx^n$ par le terme général d'une série convergente (géométrique de raison$\in[0,1[$) . la série converge absolument , donc converge.

le calcul se fait en séparant les termes selon la période , on fait apparaître une série nulle et deux séries géométriques de raisons $x^3\in]-1,1[$ qui convergent donc.

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p}x^{3p} = \sum 0 = 0\ ,\ \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p+1}x^{3p+1} = x\sum_{p=0}^{+\infty}\left(x^3\right)^p = \frac{x}{1-x^3}\ ,\ \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p+2}x^{3p+2} = \frac{x^2}{1-x^3}$$

Les trois séries précédentes convergent , donc par combinaison linéaire de séries convergentes :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \frac{x+x^2}{1-x^3}}$$

Remarque : essayer d'avoir une rédaction qui prouve dès le début du calcul que vous n'écrivez pas CV=DV+DV

2. **Exemple 2**

   1. Soit $x=\dfrac{22}{7}$ donc $a=22$ et $b=7$. Les divisions successives donnent :
      $d_0=3$ et $r_0=1$, $d_1=1$ et $r_1=3$, $d_2=4$ et $r_2=2$, $d_3=2$ et $r_3=6$,
      $d_4=8$ et $r_4=4$, $d_5=5$ et $r_5=5$, $d_6=7$ et $r_6=1$, $d_7=1$ et $r_7=3$,
      $d_8=4$ et $r_8=2$, $d_9=2$ et $r_9=6$, $d_{10}=8$ et $r_{10}=4$, etc.
      la suite semble périodique à partir du rang 1 de période 6 .
   2. Les r_n sont des entiers appartenant à l'ensemble fini $[0,b[$ par définition du reste d'une division euclidienne.
      l'application $n->r_n$ de $\mathbb{N}$ dans $[0,b[$ ne peut pas être injective (sinon $card(\mathbb{N})\leq b$) , il existe donc $n_0<n_1$ tels que $r_{n_0}=r_{n_1}$. On pose $T=n_1-n_0$ et on a $r_{n_0+T}=r_{n_0}$. On a alors par récurrence :$\forall\ n>n_0\ d_{n+T}=d_n$ et $r_{n+T}=r_n$:
      - on a $r_{n_0}=r_{n_0+T}$ donc, par unicité du quotient et du reste de la division euclidienne $d_{n_0+1}=d_{n_0+T+1}$ et $r_{n_0+1}=r_{n_0+T+1}$.
      - si $r_n=r_{n+T}$ la même unicité donne $r_{n+1}=r_{n+1+T}$ et $d_n=d_{n+T+1}$

- Il en résulte que, pour tout $n > n_0$, $r_{n+T} = r_n$ et $d_{n+T} = d_n$, ainsi

$$\boxed{\text{les suites } (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont ultimement périodiques}}$$

remarque : on ne peut pas prouver $d_{n_0} = d_{n_0+T}$: si $x = 22/7$, $r_0 = r_6$ mais $d_0 \neq d_6$

3. Pour tout $n \geq 1$, d_n est le quotient de la division euclidienne de $10.r_{n-1}$ par b où $r_{n-1} < b$ ainsi $10r_{n-1} < 10b$ donc $0 \leq d_n = E\left(\dfrac{10r_{n-1}}{b}\right) < 10$. Et comme on a un entier : $0 \leq d_n \leq 9$.

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $x - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k}\right) = \dfrac{r_n}{b}10^{-n}$.

   - vrai si $n = 0$: On a :$a = d_0 b + r_0$ donc $x - d_0 = \dfrac{r_0}{b}$.
   - On suppose $x - \left(d_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k}\right) = \dfrac{r_n}{b}10^{-n}$.
     On a $10.r_n = bd_{n+1} + r_{n+1}$ donc $\dfrac{r_n}{b}10^{-n} = \dfrac{(bd_{n+1} + r_{n+1})10^{-1}}{b}10^{-n} = d_{n+1}10^{-n-1} + r_{n+1}10^{-n-1}$.
     Le résultat est donc vrai à l'ordre $n + 1$ en reportant dans la formule initiale.

   On a $0 \leq \dfrac{r_k}{10^k.b} \leq \dfrac{9}{b}10^{-k}$ pour $k \geq 1$ et donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \dfrac{r_k}{10^k.b} = 0$, ainsi la série $\sum d_n 10^{-n}$ est convergente et

$$\boxed{x = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}}$$

remarque : c'est la démonstration du développement décimal d'un réel ; l'hypothèse "x rationnel" ne sert pas ici.

PARTIE III

1. F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xf(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ainsi F est C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{F \in E}$.
   La linéarité de l'intégrale, assure la linéarité sur E de l'application $L : f \mapsto F$.

2.

   1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a
      si $x \geq 0$ les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens et $t \in [0, x] \Longrightarrow t \geq 0$ on a donc

$$|F(x)| \leq \int_0^x t|f(t)|\,dt \leq M\int_0^x t\,dt = M\frac{x^2}{2};$$

      si $x < 0$ il faut remettre les bornes dans le bon sens et faire attention à multiplier les inégalités par des quantités positives :

$$|F(x)| = \left|\int_x^0 tf(t)\,dt\right| \leq \int_x^0 |t|\,|f(t)|\,dt \leq M\int_x^0 (-t)\,dt = M\frac{x^2}{2}$$

      synthèse des deux cas :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |F(x)| \leq M\frac{x^2}{2}}.$$

   2. Montrons, par récurrence sur n de $\mathbb{N}^*$, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n}M.$$

      - D'après la question précédente le résultat est vrai pour $n = 1$.
      - Supposons le résultat vrai à l'ordre $n \geq 1$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x t|f_n(t)|\,dt \leq \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{2.4\ldots 2n}M\,dt = \frac{x^{2n+2}}{2.4\ldots 2n+2}M.$$

        On obtient la même majoration pour $x < 0$ en intégrant sur $[x, 0]$ car l'exposant de t est impair donc $-t^{2n+1} > 0$

- Ainsi le résultat est vrai à l'ordre $n+1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ |f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n} M.}$$

3. On a donc pour tout x réel $|f_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n} M = \dfrac{x^{2n}}{2^n n!} M = M.\left(x^2/2\right)^n.\dfrac{1}{n!}$ du type $M.\dfrac{X^n}{n!}$ avec $X = \dfrac{x^2}{2}$. La factoriel $(n->n!)$ l'emporte sur l'exponentielle $(n->X^n\ )$ donc $\lim\limits_{n->+\infty}\left(\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}M\right) = 0$ et donc par majoration :

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers } 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

3. 1. $f_0 = \sin$ est évident.
   Les calculs donnent en faisant des intégrations par parties :

$$f_1(x) = \int_0^x t \sin t\, dt = [-t\cos t]_0^x + \int_0^x \cos t\, dt = -x\cos x + \sin x$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_0^x t f_1(t)\, dt = -\int_0^x t^2 \cos t\, dt + f_1(x) \\ &= -\left(\left[t^2 \sin t\right]_0^x - \int_0^x 2t \sin t\, dt\right) + f_1(x) = \\ &= -x^2 \sin(x) + 3f_1(x) \\ &= -x^2 \sin(x) + 3\left(-x\cos x + \sin x\right) \end{aligned}$$

2. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x).$$

- vrai si $n = 1$ d'après le calcul précédent : $f_2(x) = 3f_1(x) - x^2 \sin x = 3f_1(x) - x^2 f_0(x)$
- Supposons le résultat vrai à l'ordre $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \int_0^x t f_{n+1}(t)\, dt = \int_0^x t\left[(2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x)\right] dt \\ &= \int_0^x (2n+1) t f_n(t)\, dt - \int_0^x t^2 t f_{n-1}(t)\, dt \end{aligned}$$

on effectue une intégration par partie : en prenant $u = t^2, du = 2tdt$ et $v = f_n(t)$, $dv = (f_n)'(t)dt = tf_{n-1}(t)dt$ d'après la définition de la suite (f_n) :

$$\begin{aligned} f_{n+2}(t) &= (2n+1)f_{n+1}(x) - \left(\left[t^2 f_n(t)\right]_0^x - \int_0^x 2t f_n(t)\, dt\right) \\ &= (2n+1)f_{n+1}(x) - x^2 f_n(x) + 2f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

d'où le résultat à l'ordre $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x).}$$

4. 1. .
   existence
   Etablissons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'existence de deux polynômes $P_n, Q_n \in F_n$, , tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x.$$

On a $f_0(x) = \sin x$ donc $P_0(x) = 1$ et $Q_0(x) = 0$ qui sont des polynômes de degré 0
On a $f_1(x) = \sin x - x\cos x$ donc $P_1(x) = 1$ et $Q_1(x) = -x$ qui sont des polynômes de degré ≤ 1
et $P_2(x) = -x^2 + 3$ et $Q_2(x) = -3x$ polynômes de degré ≤ 2
L'existence est établie pour $n = 0, 1, 2$.
Supposons le résultat vrai à l'ordre $n \geq 2$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x) \\ &= ((2n+1)P_n(x) - x^2 P_{n-1}(x))\sin x + ((2n+1)Q_n(x) - x^2 Q_{n-1}(x))\cos x. \end{aligned}$$

Si on pose : avec

$$\boxed{P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - x^2 P_{n-1} \text{ et } Q_{n+1}(x) = (2n+1)Q_n(x) - x^2 Q_{n-1}}$$

on a bien $f_{n+1}(x) = P_{n+1}(x)\sin x + Q_{n+1}(x)\cos x$ avec P_{n+2} et Q_{n+2} , polynômes par produit et combinaison linéaire de polynômes et $d^\circ(P_{n+2}) \leq n+2$, $d^\circ(Q_{n+2}) \leq n+2$ d'après le degré d'une somme (d'un produit) de polynômes.

Avec les hypothèses de récurrence, on a bien $P_{n+1}, Q_{n+1} \in F_{n+1}$, d'où résultat vrai à l'ordre $n+1$;

pour tout n il existe $P_n, Q_n \in F_n$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x.$$

remarque : n'oubliez pas de vérifier "polynôme" et le degré

unicité :

On suppose qu'il existe deux décompositions différentes $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x = R_n(x)\sin x + S_n(x)\cos x$$

avec les conditions de degré .

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $f_n(2k\pi) = Q_n(2k\pi) = S_n\,(2k\pi)$. $Q_n - S_n$ est donc un polynôme de degré au plus n ayant une infinité de racines. il est nul : $Q_n = S_n$

de même, avec $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ on montre $P_n = R_n$.. D'où l'unicité des fonctions polynômes P_n et Q_n.

par unicité des polynômes P_n (et Q_n) la relation de récurrence trouvée ci dessus est la seule possible.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists!(P_n, Q_n) \in (F_n)^2 \text{ , } (\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } f_n(x) = P_n(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x))}$$

2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - x^2 P_{n-1}(x).$$

Comme $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = 1$, on en déduit,par récurrence immédiate, que les fonctions P_n sont des polynômes à coefficients entiers (relatifs)

5. On suppose que $\pi = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times .\mathbb{N}^*$

1. $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ est un polynôme à coefficients entiers , donc

$$P_n(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{n} p_k \left(\frac{p}{2q}\right)^k = \frac{1}{(2q)^n}\sum_{k=0}^{n} p_k p^k (2q)^{n-k} \text{ avec } \sum_{k=0}^{n} p_k p^k (2q)^{n-k} \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\left((2q)^n P_n(\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}}$$

D'après **III.2.2)** : sin étant borné sur $\mathbb{R}$ et un majorant de $|\sin|$ étant $M = 1$ on a ici $|f_n(\dfrac{\pi}{2})| \leq \dfrac{(\frac{p}{2q})^{2n}}{2.4\ldots 2n}$

Or $f_n(\dfrac{\pi}{2}) = P_n(\dfrac{\pi}{2})$ (par définition de P_n et Q_n).

il en résulte que $\left|(2q)^n P_n(\dfrac{\pi}{2})\right| \leq \dfrac{(\frac{p^2}{2q})^n}{n!}$

par comparaison d'une factorielle et d'une suite géométrique $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (2q)^n P_n(\dfrac{\pi}{2}) = 0}$.

2. $\left((2q)^n P_n(\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers convergeant vers 0, elles est donc stationnaire nulle:

si $\varepsilon = 1/2$: $\exists N\ n \geq N \Longrightarrow \left|(2q)^n P_n(\frac{\pi}{2})\right| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow (2q)^n P_n(\frac{\pi}{2}) = 0$ (seul entier inférieur à 1/2 en valeur absolue)

Or comme $\pi \neq 0$, $P_{n-1}(\pi/2) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 ((2n+1)P_n(\pi/2) - P_{n+1}(\pi/2))$ (résultat du calcul de **III.4.1**)
Donc $(P_{n+1}(\pi/2) = P_n(\pi/2) = 0) \Longrightarrow P_{n-1}(\pi/2) = 0$. et donc par une récurrence double décroissante (initialisé avec $P_N(\pi/2) = P_{N+1}(\pi/2) = 0$) : $\forall n{\leq}N$: $P_n(\pi/2) = 0$.
le terme général est donc nul pour $n \geq N$ et $n \leq N$, donc la suite est nulle.
absurde car $P_0(\pi/2) = 1$

$\boxed{\pi \text{ n'est pas un rationnel}}$

PARTIE IV

1.

1. par l'absurde si $\sin(n) = 0$ et $n \neq 0$, il existe un entier $k \neq 0$ tel que $n = k\pi$ donc $\pi = \frac{n}{k}$ est rationnel : **absurde**
2. Si on suppose que la suite est ultimement périodique, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n.$$
Or si p est une période, tout multiple de p est une période. On peut choisir un multiple τ de p qui soit supérieur à n_0 .
Pour tout entier k supérieur ou égal à 1 , on a donc $a_{k\tau} = a_\tau$ ainsi $\sin(k\tau)$ est du signe de $\sin(\tau) \neq 0$ donc de signe constant.
3. Pour tout $k \geq 1$, on a $\sin(2k\tau) = 2\sin(k\tau)\cos(k\tau)$ avec $\sin(k\tau)$ et $\sin(2k\tau)$ non nuls et de même signe donc $\cos(k\tau) > 0$.
si $k = 0$ le résultat $\cos(0) > 0$ est évident.

2. On a $G = \tau\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n\tau + 2k\pi,\ (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. G contient 0 et pour tout $x, y \in G$, on vérifie aisément que $x - y \in G$:
s'il existe des entiers tels que $x = n\tau + 2k\pi$ et $y = m\tau + 2l\pi$ alors $x - y = (n-m)\tau + 2(k-l)\pi$ avec $n - m$ et $k - l$ entiers
$\boxed{G \text{ est un sous-groupe additif de } \mathbb{R}}$
2. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors comme $2\pi \in G$ (prendre $n = 0$ et $k = 1$) il existe $p \in \mathbb{Z}$ tels que $2\pi = pa$ de même il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel $\tau = qa$. Comme $a \neq 0$, on en déduit que $\pi = \frac{q\tau}{2p}$ donc $\pi \in \mathbb{Q}$,**absurde** d'après la troisième partie.$\boxed{\nexists a \in \mathbb{Z} \text{ , } G = a\mathbb{Z}}$
3. On pose $G^+ = G \bigcap \mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des éléments strictement positifs de G). G^+ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ (car G^+ contient 2π) minoré par 0, il possède donc une borne inférieure $a \geq 0$.
4. On suppose que $a \in G^+$ alors $a > 0$
   - comme G est un groupe additif, $a \in G \Longrightarrow 2a = a + a \in G \cdots$ Par récurrence $ka \in G \Longrightarrow (k+1)a = ka + a \in G$ comme somme de deux éléments de G .:$a\mathbb{Z} \subset \mathbb{G}$
   - Soit $x \in G$ et $x \neq 0$. Notons $k = E(\frac{g}{a})$ alors $g = ka + r$ avec $0 \leq r < a$ et $r = g - ka \in G$ comme différence d'éléments de G .
   - Comme a est la borne inférieure de G^+ et que $r < a$ on a obligatoirement $r \notin G^+$, on a donc $r \leq 0$. Donc $r = 0$ et $x = ka$ ainsi $G \subset a\mathbb{Z}$.
   et donc $G = a\mathbb{Z}$

   absurde d'après **4.2.2**,$\boxed{\inf\{G^+\} \text{ n'est donc pas élément de } G^+}$.
5. Supposons que $a > 0$.
Comme $2a > a$, $2a$ n'est pas un minorant de G^+; il existe donc $g \in G^+$ tel que $g < 2a$.
De même g n'étant pas un minorant de G^+; il existe donc $g' \in G^+$ tel que $g' < g < 2a$.

   Les éléments étant dans G^+ $a \leq g'$ et même $a \neq g'$ car $a \notin G^+$
On a $0 < g - g' < a$ avec $g - g' \in G^+$, **absurde** car a est la borne inférieure.

   $\boxed{\inf\left(G^+\right) = 0}$

3.

1. Comme $\inf G^+ = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,10^{-n} n'est pas un minorant de G^+ et donc il existe $g_n \in G^+$ tel que $g_n < 10^{-n}$.De plus $g_n > 0$ par définition de G^+ .
2. Soit x un réel.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\lambda_n = E(\frac{x}{g_n})$, donc $x_n = \lambda_n.g_n \in G$ (car $g_n \in G$ et $\lambda_n \in \mathbb{Z}$) et $0 < x - x_n < g_n < 10^{-n}$.
   Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G converge vers x.

4.

1. D'après la question précédente , pour $x = \frac{2\pi}{3}$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G qui converge vers x. Pour tout n, il existe deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $y_n = k_n\tau + l_n 2\pi$. Par continuité de la fonction cosinus, on a

$$-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos y_n = \lim_{n\to+\infty} \cos(k_n\tau).$$

   Comme la fonction cos est paire, quitte à remplacer k_n par $-k_n$, on peut supposer $k_n \in \mathbb{N}$.

   Finalement, il existe une suite d'entiers positifs $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\cos(k_n\tau))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

2. Or on a montrer au début que la suite $(\cos(k_n\tau))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, donc , si elle converge, sa limite est positive : **absurde**
   $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas ultimement périodique}}$

PARTIE V

1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de QP.

   1. Les éléments de la suite a ont un nombre fini de valeurs distinctes (au plus $n_\circ + T$ avec les notations de la première partie) , la suite a est donc bornée . Posons $M = \sup(|a_i|)$.
      La majoration $0 \leq |a_n x^n| \leq M|x|^n$ montre que la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$, elle a donc un rayon de convergence vérifiant $R_a \geq 1$.

      Si la partie périodique contient un terme non nul alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers zéro et donc $R_a \leq 1$.
      Si la partie périodique ne contient que des termes nuls alors la suite est stationnaire nulle et la somme de la série entière est un polynôme . $R_a = +\infty$.
      Finalement $R_a = +\infty$ si et seulement si la suite est stationnaire nulle. . Dans le cas contraire, $R_a = 1$.

   2. Lorsque $R_a = +\infty$, la somme de la série entière est le polynôme $\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n$.

      Sinon on peut faire un regroupement en utilisant la période :

$$\begin{aligned} \forall x \in \ ]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{n_0+T-1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^{n+kT} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{n_0+T-1} a_n x^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x^T\right)^k = P(x) + \frac{Q(x)}{1-x^T} \end{aligned}$$

      où $P(x) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n$ et $Q(x) = \sum_{n=n_0}^{n_0+\tau-1} a_n x^n$.

$$\boxed{\text{La somme de la série sur }]-1,1[\text{ est donc une fraction rationnelle}}$$

      .

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est la restriction à $]-R,R[$ d'une fraction rationnelle $F(x)$.
   Il est clair, d'après la question précédente, que si $R \neq 1$ ou $R \neq +\infty$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être ultimement périodique ($\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$)

Le résultat reste faux même si le rayon de convergence est 1 :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

Cependant, la suite $a = (n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, possède une infinité de valeurs distinctes; elle n'est donc pas ultimement périodique.

3. On définit maintenant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n.$$

   1. $a_0 = 1, a_1 = -a_0 = -1, a_2 = a_1 = -1, a_3 = -a_1 = 1, a_4 = a_2 = -1,$
      $a_5 = -a_2 = 1, a_6 = a_3 = 1, a_7 = -a_3 = -1, a_8 = a_4 = 1, a_9 = -a_4 = 1, a_{10} = a_5 = 1\cdots$

      $$\boxed{a = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,\cdots)}$$

   2. La suite a est bornée, donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$. On a $|a_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la série $\sum |a_n|$ est divergente et $R \leq 1$.
      Finalement $R = 1$.
   3. On note S sa somme sur $]-1,1[$.

      $$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)^2 - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)^2 \\ &(1-x)S(x^2).\end{aligned}$$

      Pour tout x, $x \in]-1,1[$ et $n \in N^*$, on a donc par récurrence :

      $$S(x) = S(x^{(2^{n+1})})\prod_{k=0}^{n}(1 - x^{(2^k)}). \qquad (*)$$

      Pour $x \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^{(2^{n+1})} = 0$. S étant continue en 0 (somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence) il vient $\lim_{n\to+\infty} S(x^{(2^{n+1})}) = S(0)$. Or $S(0) = a_0 = 1$, ainsi

      $$S(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1 - x^{(2^k)}).$$

   4. Soit n donné dans $\mathbb{N}$. On peut écrire en répartissant le dénominateur sur les n premiers facteurs de l'expression $(*)$ ci dessus :

      $$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1 - x^{(2^k)}}{1-x}\right)(1 - x^{(2^n)})S(x^{(2^{n+1})}).$$

      Si on prend la fonction $\phi : x- > x^{(2^k)}$ elle est dérivable en 1 de dérivée 2^k donc

      $$\lim_{x->}\left(\frac{1 - x^{(2^k)}}{1-x}\right) = 2^k$$

      Comme $|S(x)| \leq 1$ (d'après la question précédente) et comme $\lim_{x\to 1^-}(1 - x^{(2^n)}) = 0$, on obtient

      $$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{S(x)}{(1-x)^n}\right) = 0$$

      $S(x)$ est donc négligeable en 1 devant toutes les fonctions puissance $(1-x)^n$.
      Or si F est une fraction rationnelle on peut factoriser dans F : $F(x) = (1-x)^\alpha \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q n'ayant pas la racine 1. On a alors $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{F(x)}{(1-x)^n}\right) = \pm\infty$ dès que $n > \alpha$
      Donc $S(x)$ n'est pas une fraction rationnelle. **absurde**d'après **V.1**

      $$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas ultimement périodique}}$$

.